

Příklad. Pomocí vhodné funkce a jejího Taylorova polynomu prvního a druhého stupně odhadněte:

$$\sqrt{3,03^2 + 4,01^2}$$

Řešení. Vhodnou funkcí bude

$$f = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

K ní sestrojíme Taylorův polynom se středem v bodě $A = [3, 4]$. Spočtíme proto parciální derivace prvního a druhého stupně:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & f_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f_{xx} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} & f_{xy} &= \frac{-xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} & f_{yy} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Vyhodnotíme v bodě A

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{3}{5} & f_y &= \frac{4}{5} \\ f_{xx} &= \frac{16}{125} & f_{xy} &= \frac{-12}{125} & f_{yy} &= \frac{9}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4) \\ T_2(x, y) &= 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4) + \frac{1}{2} \left(\frac{16}{125}(x - 3)^2 + 2 \cdot \frac{-12}{125}(x - 3)(y - 4) + \frac{9}{125}(y - 4)^2 \right) \end{aligned}$$

Nyní stačí dosadit za $[x, y] = [3,03, 4,01]$

$$\begin{aligned} T_1(3,03, 4,01) &= 5,026 \\ T_2(3,03, 4,01) &= 5,0260324 \end{aligned}$$

Porovnáme se skutečnou hodnotou

$$\sqrt{3,03^2 + 4,01^2} = 5,0260322322882$$

□

Příklad. Uvažme funkci

$$z = \ln(u^2 + v^2),$$

kde

$$u = y \cos x,$$

$$v = x \sin y.$$

Spočtěte parciální derivace z_x a z_y .

Řešení.

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = \frac{2u}{u^2 + v^2} (-y \sin x) + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \sin y$$
$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cos x + \frac{2v}{u^2 + v^2} x \cos y$$

Můžeme ještě dosadit za u a v , vyžaduje-li to zadání. □

Poznámka. Uvažme

$$z = f(u, v),$$

kde

$$u = g_1(w, x, y)$$

$$v = g_2(w, x, y).$$

Pak

$$z_w = z_u \cdot u_w + z_v \cdot v_w$$

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$$

$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$$

Pokud dále například

$$z = f(u, v, w),$$

kde

$$u = g_1(x, y),$$

$$v = g_2(x),$$

$$w = g_3(y),$$

pak

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x + z_w w_x = z_u u_x + z_v v_x,$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y + z_w w_y = z_u u_x + z_w w_x.$$

Poslední rovnosti totiž plynou z toho, že

$$w_x = 0, \quad v_y = 0.$$

Příklad. Rozhodněte, kde nejsou splněny předpoklady existence implicitní funkce

$$F: x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0.$$

Přičemž tuto implicitní funkci hledáme ve tvaru $y = f(x)$ v okolí nějakého bodu x_0, y_0 .

Řešení. Předpoklady existence implicitní funkce:

- F je spojitá
- $F(x_0, y_0) = 0$
- F_y spojitá v x_0, y_0 , $F_y \neq 0$

Budeme chtít porušit podmínku $F_y \neq 0$.

$$F_y: 2x - 2y = 0$$

Odtud $x = y$. Dosadíme do F

$$x^2 + 2x^2 - x^2 - 8 = 0$$

Odtud $x = \pm 2$

□

Příklad. Spočítejte parciální derivace z_x a z_y funkce

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x - 21 = 0.$$

Řešení. Zderivujeme funkci podle x a y , přičemž z chápeme jako funkci v proměnných x, y .

$$\begin{aligned} \cos y - y z_x \sin z - z \sin x + z_x \cos x &= 0 \\ -x \sin y + \cos z - y z_y \sin z + z_y \cos x &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádříme z_x a z_y

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z} \\ z_y &= \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z} \end{aligned}$$

□

Příklad. Zjistěte něco zajímavého o funkci

$$F: y^3 - 2xy + x^2 = 0$$

v okolí bodu $A = [1, 1]$.

Řešení. Protože F splňuje následující podmínky

- F je spojitá na okolí A
- $F(A) = 0$
- $F_y(A) = (3y^2 - 2x)_A = 1 \neq 0$

existuje v okolí bodu A vyjádření této funkce ve tvaru $y = f(x)$.

$$F_x = 3y^2y' - 2y - 2xy' + 2x = 0$$

Odtud vyjádříme

$$y' = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}$$

Navíc $y'(A) = 0$. V bodě A má tedy funkce F stacionární bod.

$$F_{xx} = y''(3y^2 - 2x) + y'(6yy' - 4) + 2 = 0$$

Odtud vyjádříme

$$y'' = \frac{y'(4 - 6yy') - 2}{3y^2 - 2x}$$

Navíc $y''(A) = -2$. V bodě A nabývá funkce F lokálního maxima. □