

# Limita funkcí více proměnných

Cílem bude vypočítat

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y),$$

nebo zdůvodnit, proč daná limita neexistuje.

Standardní metody pro výpočet takových limit jsou

- dosazení do limity,
- odhad limity zdola a shora,
- zavedení polárních souřadnic.

My se nyní budeme zabývat poslední z těchto metod. Transformace do polárních souřadnic se v  $\mathbb{R}^2$  provádí pomocí substituce:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \rho \cos \varphi, \\y &= y_0 + \rho \sin \varphi,\end{aligned}$$

přičemž  $\rho \rightarrow 0^+$  a  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

V  $\mathbb{R}^3$  vypadá situace takto:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \rho \cos \varphi \sin \theta, \\y &= y_0 + \rho \sin \varphi \sin \theta, \\z &= z_0 + \rho \cos \theta,\end{aligned}$$

kde  $\rho \rightarrow 0^+$  a  $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$ .

Pro jednoduchost se budeme dále zabývat pouze situací v  $\mathbb{R}^2$ .

Vzniklá limita je funkce jedné proměnné  $\rho$ , kterou již dovedeme vypočítat (například pomocí L'Hospitalova pravidla). Jestliže výsledkem je funkce závislá na  $\varphi$ , závisí limita na úhlu, ze kterého se k danému bodu blížíme, proto neexistuje. Pokud je výsledkem nějaká konstanta, je splněna nutná podmínka pro existenci limity. Protože fixujeme úhel  $\varphi$  (chováme se k němu jako ke konstantě), splnění podmínky výše nám pouze říká, že ať se k určenému bodu blížíme po kterékoli přímce, vyjde výsledek vždy stejný. Funkce však může být taková, že po blížíme-li se po přímkách, vyjde výsledek vždy stejně, ale po jiné křivce už může vyjít jinak. Tuto možnost musíme vyloučit. Řešení je následující:

Uvážíme přechod k polárním souřadnicím:  $\lim f(x, y) = \lim f(\rho) = L$ . Hledáme funkci  $g(\rho)$  takovou, aby platilo:

$$\begin{aligned}|f(\rho) - L| &\leq g(\rho), \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) &= 0.\end{aligned}$$

**Příklad 1.**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) = 0$$

Nyní hledáme vhodnou funkci  $g(\rho)$ . Když sinus i cosinus odhadneme shora konstantou jedna, dostáváme:

$$|\rho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)| \leq 2\rho, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} 2\rho = 0.$$

Proto

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

**Příklad 2.**

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy + 1)^{\frac{x}{x^2 + y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(1 + \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi\right)^{\frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi\right)^{\frac{\cos \varphi}{\rho}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} e^{\ln\left(1 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi\right) \frac{\cos \varphi}{\rho}} = e^{\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\cos \varphi \ln\left(1 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi\right)}{\rho}} = e^{\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\cos \varphi \rho \sin 2\varphi}{1 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Postačující podmínka je splněna, nyní nám stačí nalézt funkci  $g(\rho)$  tak, aby

$$\left| \frac{\cos \varphi \ln\left(1 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi\right)}{\rho} \right| \leq g(\rho), \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = 0.$$

Zkusme proto odhadnout výraz vlevo shora:

$$\left| \frac{\cos \varphi \ln\left(1 + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi\right)}{\rho} \right| \leq \left| \frac{\ln(1 + \rho^2)}{\rho} \right| = g(\rho),$$

navíc platí

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left| \frac{\ln(1 + \rho^2)}{\rho} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2\rho}{1 + \rho^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy + 1)^{\frac{x}{x^2 + y^2}} = 1.$$