

Parciální diferenciální rovnice

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Ústav matematiky a statistiky

Brno

5. února 2015

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Značení	2
1.2	Základní definice	2
1.3	Příklady	3
1.4	Klasifikace lineárních rovnic druhého řádu	4
1.5	Funkce s kompaktním nosičem	5
1.6	Několik poznatků z teorie integrálu	5
2	Transportní rovnice	7
3	Metoda separace proměnných	9
4	Cauchyho - Kowalevské věta	12
5	Rovnice prvního řádu	14
5.1	Metoda charakteristik	14
5.2	Homogenní lineární rovnice	17
5.3	Kvazilineární rovnice	18
5.4	Napřimování hranice a existence řešení	19
6	Metoda Fourierovy transformace	23
6.1	Konvoluce	23
6.2	Aproximace hladkými funkcemi	24
6.3	Fourierova transformace	25
7	Laplaceova a Poissonova rovnice	30
8	Rovnice vedení tepla	41
9	Vlnová rovnice	51
10	Sobolevovy prostory	62

Tento text vznikl jako studijní materiál k předmětu Parciální diferenciální rovnice a pokrývá všechny kapitoly zkoušené v semestru podzim 2014. Části, které na zkoušce nebudou, jsou [barevně odlišený](#). Text je vytvořen na základě přednášek RNDr. Michala Veselého, Ph.D., do L^AT_EXu vysázel Bc. Dominik Velan.

1 Úvod

1.1 Značení

$\mathbb{E}$	reálný euklidovský prostor
$ \dots $	norma v $\mathbb{E}^n$
$\frac{\partial u}{\partial x_j} = u_{x_j} = \partial_{x_j} u$	parciální derivace funkce $u: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ podle x_j
$\nabla u = D_u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$	gradient
$\nabla \vec{f} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_s \end{pmatrix}$	pro vektorovou funkci $\vec{f}: \Omega \subseteq \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{E}^s$, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$
$\operatorname{div} \vec{f} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \vec{f}$	divergence vektorové funkce $\vec{f}$, $r = s$ $\nabla \vec{f}$ je Jacobiho matice, $\nabla \cdot \vec{f}$ její stopa
$\Delta u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$	kde $u: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ pro $\Omega \subseteq \mathbb{E}^d$
$\Delta \vec{f} = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_s)$	pro vektorovou funkci $\vec{f}$
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, kde $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$	d -dimenzionální multiindex výšky (řádu) $ \alpha = \sum_{j=1}^d \alpha_j$
$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{ \alpha } u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$, $ \alpha \leq k$	derivace u dle multiindexu α
$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x); \alpha = k\}$	
$ D^k = \sqrt{\sum_{ \alpha =k} (D^\alpha u(x))^2}$	pro $k = 1$ chápeme Du jako vektor, pro $k = 2$ jako matici
$D^\alpha \vec{f} = (D^\alpha f_1, \dots, D^\alpha f_s)$	
$D^k \vec{f} = \{D^\alpha \vec{f}; \alpha = k\}$	
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$	kde $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{E}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$
$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \dots \alpha_d!$	kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$
$\alpha(n)$	objem n -dimenzionální jednotkové koule

n	$\alpha(n)$	x	$\Gamma(x)$
1	2	$x > 0$	$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$
2	π	$x + 1$	$x \cdot \Gamma(x)$
3	$\frac{4}{3}\pi$	1	1
n	$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\pi}$

1.2 Základní definice

Definice. *Parciální diferenciální rovnici* (PDE) rozumíme rovnici, která kromě neznámé funkce (alespoň dvou proměnných) obsahuje také její (parciální) derivace.

Poznámka. Nebude-li řečeno jinak, budeme pracovat v n -dimenzionálním euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. U, V, W budou značit otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Necht $F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ je známá funkce. Rovnice

$$(1.2.1) \quad F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

pro $x \in U$, kde $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce, se nazývá (reálná) *parciální diferenciální rovnice* k -tého řádu.

Definice. Necht $\vec{F}: \mathbb{R}^{m \cdot n^k} \times \mathbb{R}^{m \cdot n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \cdot n} \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je známé zobrazení. Rovnice

$$\vec{F}(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

pro $x \in U$, kde $u = \vec{u}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$ je neznámá vektorová funkce, se nazývá *systém parciálních diferenciálních rovnic k-tého řádu*.

PDE (1.2.1) se nazývá *lineární*, je-li F lineární ve všech proměnných, které zastupují funkci u , tj. pokud ji lze psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

pro jisté funkce a_α, f .

Je-li $f \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*.

Definice. Parciální diferenciální rovnice se nazývá *kvazilineární*, je-li funkce F lineární v těch derivacích $D^\alpha u$, kdy $|\alpha| = k$, tj. pokud ji lze psát jako

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \cdot D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

PDE (1.2.1) se nazývá *nelineární*, pokud závisí nelineárně na parciálních derivacích u nejvyššího řádu.

Klasickým řešením PDE k -tého řádu se rozumí funkce $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ splňující (1.2.1) $\forall x \in U$ a má spojitě parciální derivace až do řádu k včetně, kdy píšeme $u \in C^k$ respektive $u \in C^k(U)$.

1.3 Příklady

- Lineární PDE

Laplaceova rovnice $\Delta u = 0$

Lineární transportní rovnice $u_t + \sum_{i=1}^n b_i \cdot u_{x_i} = 0$

Rovnice vedení tepla $u_t - \Delta u = 0$

Rovnice Schrödingerova $i u_t + \Delta u = 0$

Vlnová rovnice $u_{tt} - \Delta u = 0$

Telegrafní rovnice $u_{tt} + a \cdot u_t - u_{xx} = 0$

Rovnice příčných kmitů $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$

- Kvazilineární a nelineární PDE

obecná Poissonova rovnice $-\Delta u = f(u)$

Rovnice s p -Laplaciánem $\operatorname{div}(|Du|^{p-2} \cdot Du) = 0$

Eikonálová rovnice $|Du| = 1$

Rovnice minimální plochy $\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 1$

Mongeova-Ampérova rovnice $\det(D^2 u) = 1$

Rovnice kontinuity $u_t + \operatorname{div} \vec{F}(u) = 0$

Hamiltonova-Jacobiho rovnice $u_t + H(Du, x) = 0$

Kortewegova-de Vriesova rovnice $u_x + a u u_x + u_{xxx} = 0$

- Systémy PDE

Maxwellovy

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \vec{F}(\vec{B}) \\ \vec{B}_t &= -\vec{F}(\vec{E}) \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Eulerovy

$$\begin{aligned}\vec{u}_t + \vec{u} D \vec{u} &= -Df \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

Navierovy-Stokesovy

$$\begin{aligned}\vec{u}_t + \vec{u} D \vec{u} - \Delta \vec{u} &= -Df \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

1.4 Klasifikace lineárních rovnic druhého řádu

Obecnou lineární rovnici 2. řádu v $\mathbb{R}^n$ lze zapsat jako

$$(1.4.1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x) u(x) = f(x),$$

kde $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Výraz $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ se označuje jako hlavní část rovnice (1.4.1). Pro každé $x \in U$ dává hlavní část matici

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n.$$

Lze požadovat, aby matice $A(x)$ byla symetrická.

Definice. Necht $\lambda_i(x)$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ jsou vlastní čísla symetrické matice hlavní části rovnice (1.4.1).

Jsou-li všechna čísla $\lambda_i(x)$ nenulová a stejného znaménka, rovnice (1.4.1) se nazývá *eliptická PDE*.

Jsou-li všechna čísla $\lambda_i(x)$ nenulová, ale ne všechna stejného znaménka, rovnice (1.4.1) se nazývá *hyperbolická PDE*.

Je-li alespoň jedno číslo $\lambda_i(x)$ nulové, rovnice (1.4.1) se nazývá *parabolická PDE*.

Příklad. • *Laplaceova rovnice - eliptická*

- *Vlnová rovnice - hyperbolická*

- *Rovnice vedení tepla - parabolická*

Poznámka. Typ rovnice se může měnit v závislosti na části definičního oboru, ve které rovnici zkoumáme. Například Tricomioho rovnice

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

je eliptická pro $y > 0$ parabolická pro $y = 0$ a hyperbolická pro $y < 0$.

1.5 Funkce s kompaktním nosičem

Je-li f spojitá funkce definovaná na topologickém prostoru X , pak jejím nosičem nazveme nejmenší uzavřenou množinu vně které se f nuluje, tedy

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Je-li $\text{supp } f$ kompaktní, řekneme, že funkce f je funkce s kompaktním nosičem. Označme

$$C_c(X) = \{f \in C(X) \mid \text{supp } f \text{ je kompaktní}\}.$$

Jako $C_0(X)$ označujeme množinu všech spojitých funkcí mizejících v nekonečnu, tj. spojitých funkcí f , pro které je množina $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ kompaktní pro každé $\epsilon > 0$. Zjevně je $C_0(X) \supset C_c(X)$.

Pokud je X Hausdorffův lokálně kompaktní topologický prostor, potom je $C_0(X)$ uzávěrem $C_c(X)$.

1.6 Několik poznatků z teorie integrálu

Definice. Necht $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) je otevřená a ohraničená množina. Řekneme, že její *hranice* ∂U je *třídy* C^k , jestliže pro každý bod $x^0 \in \partial U$ existuje $r > 0$ a funkce $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^k taková, že (až na případnou permutaci souřadnic) platí

$$U \cap B(x^0, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

nebo

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n < \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Řekneme, že *hranice* ∂U je *třídy* C^∞ , je-li třídy C^k pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Řekneme, že *hranice* ∂U je *analytická*, tj. třídy C^ω , je-li zobrazení γ analytické.

Je-li hranice ∂U alespoň třídy C^1 , pak je na ∂U definováno vektorové pole vnějších jednotkových normál, kdy $x \in \partial U$ přiřazujeme

$$x \mapsto \vec{v}(x) = (v^1(x), \dots, v^n(x)) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$$

nebo při jiném značení

$$x \mapsto \vec{n}(x) = (n^1(x), \dots, n^n(x)) = (n_1(x), \dots, n_n(x)).$$

Je-li $u \in C^1(\overline{U})$, potom definujeme normálovou derivaci u jako

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = \vec{v} \cdot Du$$

při jiném značení

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot Du.$$

Znalost parametrizace γ umožňuje v jistém okolí bodu x^0 hranici ∂U „napřímít“. To se děje pomocí transformace Φ , kdy $y_i = x_i$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Protože $\det D\Phi(x) = 1$, existuje k této transformaci inverzní transformace Ψ , kdy $x_i = y_i$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a $x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})$.

Věta (Gaussova-Greenova). *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a $u \in C^1(\overline{U})$. Potom platí*

$$\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} u n^i dS,$$

pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kde n^i je i -tá složka jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$.

Věta (Integrace per-partes). *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a $u, v \in C^1(\overline{U})$. Potom platí*

$$\int_U u_{x_i} v dx = \int_{\partial U} u v n^i dS - \int_U u v_{x_i} dx,$$

pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Věta (Greenovy identity). *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a $u, v \in C^2(\overline{U})$. Potom platí*

1.

$$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS,$$

2.

$$\int_U Du Dv dx = \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u dS - \int_U u \Delta v dx,$$

3.

$$\int_U u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial U} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS.$$

Věta. *Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a integrovatelná. Pak $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ je*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr.$$

Zvláště pro libovolné $r > 0$ je

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x_0, r)} f dx = \int_{\partial B(x_0, r)} f dS.$$

Věta. *Nechť $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lipschitzovsky spojitá a pro s.v. $r \in \mathbb{R}$ je množina*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) = r\}$$

analytická $(n-1)$ dimenzionální hyperplocha v $\mathbb{R}^n$. Nechť je dále funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá a integrovatelná. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) |Du(x)| dx = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{\{x \mid u(x)=r\}} f dS \right) dr.$$

2 Transportní rovnice

Uvažujeme rovnici

$$(2.1) \quad u_t + b \cdot Du = 0,$$

kde $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $u: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce. Transportní rovnice (2.1) lze zapsat ve tvaru

$$(1, b) \cdot (u_t, Du) = (b, 1) \cdot (Du, u_t) = 0,$$

tj. je-li u řešením (2.1), pak jeho směrová derivace ve směru vektoru $(b, 1)$ je nulová. Zvolme libovolný ale pevný bod $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ a definujeme funkci

$$z(s) = u(x + sb, t + s), \quad s \geq -t.$$

Platí

$$z'(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s), \quad s > -t.$$

Ovšem $z'(s) = 0$ pro $s > -t$, neboť u je řešením rovnice (2.1). Tedy $z(s)$ je konstantní funkce, respektive u je konstantní na polopřímce určené bodem $(x - tb, 0)$ a směrovým vektorem $(b, 1)$.

Uvažujeme počáteční problém

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_t + b \cdot Du &= 0, & \text{pro } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g, & \text{pro } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ a funkci $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ známe.

Přímka jdoucí bodem (x, t) se směrovým vektorem $(b, 1)$ má parametrické zadání $(x + sb, t + s)$, $s \in \mathbb{R}$. Tato přímka protne $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ v bodě $(x - tb, 0)$. Protože víme, že případné řešení je na této přímce konstantní a že $u(x - tb, 0) = g(x - tb)$, dostáváme

$$(2.3) \quad u(x, t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Jestli tedy počáteční problém (2.2) má dostatečně hladké řešení, pak toto řešení nutně splňuje (2.3). Především je-li $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, pak pro funkci u zadanou pomocí (2.3) platí

$$u_t(x, t) + b \cdot Du(x, t) = -Dg(x - tb) \cdot b + b \cdot Dg(x - tb) = 0,$$

$x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, tj. u je řešením (2.2).

Stejným způsobem řešíme přidružený problém

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_t + b \cdot Du &= f & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Zvolme pevně bod $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a položíme

$$z(s) = u(x + sb, t + s).$$

Platí

$$z'(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s)$$

a dále

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - tb) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 z'(s) \, ds = \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) \, ds = \int_0^t f(x + (\xi - t) \cdot b, \xi) \, d\xi, \quad \xi = s + t. \end{aligned}$$

Řešením (2.4) by tedy mohla být funkce

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (\xi - t) \cdot b, \xi) \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Přímým výpočtem lze ukázat, že za obdobných předpokladů na hladkost jako v předchozím případě je tato funkce u řešením (2.4). Tj. podmínky například $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

V rychlosti se analogicky podívejme na následující problém

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_t + b \cdot Du + c \cdot u &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde navíc $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Uvážením tvaru $cu = -(1, b) \cdot (u_t, Du) = -(Du, u_t)(b, 1)$ zavedeme funkci

$$z(s) = u(x + sb, t + s).$$

Derivováním dostaneme

$$z'(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = (b, 1) \cdot (Du, u_t),$$

tedy $z'(s) + cz(s) = 0$.

To je ODR s řešením $z(s) = z(0) \cdot e^{-cs}$, tj.

$$u(x + sb, t + s) = u(x, t) e^{-cs}.$$

Položme $s = -t$ a využijme počáteční podmínky $g(x - tb) = u(x - tb, 0) = u(x, t) e^{ct}$. Proto funkce

$$u(x, t) = g(x - tb) e^{-ct}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

by mohla být řešením (2.5).

Znovu přímým výpočtem lze ověřit, že za předpokladu $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ řešením této funkce skutečně je.

3 Metoda separace proměnných

Podstatou této metody je hledání řešení dané PDE ve tvaru „vhodné kombinace“ funkcí menšího počtu proměnných (obvykle ve tvaru součtu či součinu), které lze stanovit dosazením do zadané PDE (případně využitím podmínek řešené úlohy).

Příklad. Necht $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina (s analytickou hranicí). Uvažujme počáteční okrajový problém pro rovnici vedení tepla ve tvaru

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } U \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{na } \partial U \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } U \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ je známá funkce.

Předpokládejme, že existuje řešení problému (3.1) ve tvaru

$$(3.2) \quad u(x, t) = v(x) \cdot w(t), \quad x \in \bar{U}, \quad t \in [0, \infty).$$

Musí platit

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= v(x) w'(t) \\ \Delta u(x, t) &= \Delta v(x) \cdot w(t) \\ 0 &= u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = v(x) \cdot w'(t) - \Delta v(x) \cdot w(t) \end{aligned}$$

pro $x \in U, t > 0$. To lze pro všechna uvažovaná x, t taková, že $v(x) \cdot w(t) \neq 0$ zapsat jako

$$(3.3) \quad \frac{\Delta v(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Proměnné x, t jsou separované a nezávislé, což je možné jen tak, že obě strany (3.3) jsou rovny jisté konstantě, tj.

$$\frac{\Delta v(x)}{v(x)} = \mu = \frac{w'(t)}{w(t)}, \quad x \in U, \quad t > 0, \quad v(x) \cdot w(t) \neq 0$$

a dostáváme

$$(3.4) \quad w'(t) = \mu \cdot w(t) \quad t > 0,$$

$$(3.5) \quad \Delta v(x) = \mu \cdot v(x) \quad x \in U.$$

Obecné řešení rovnice (3.4) je

$$w(t) = c \cdot e^{\mu t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Funkci $v(x)$ lze získat jako netriviální řešení okrajové úlohy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Delta v(x) + \lambda v(x) &= 0, & \text{na } U, \\ v(x) &= 0, & \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Tato úloha (3.6) se nazývá Sturmova-Liouvilleova úloha.

Za jistých předpokladů je tato úloha řešitelná pro nejvýše spočetnou množinu čísel λ (tzv. vlastní čísla). Jim odpovídající netriviální řešení se nazývají vlastní funkce.

Odbočka. Uvažujme problém tzv. vlastních čísel a vlastních funkcí pro eliptické symetrické operátory $Lv = \lambda v$ na U , $v = 0$ na ∂U , kde U je otevřená a ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$.

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}, \quad a_{ij} \in C^\infty(\overline{U}), \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ pro } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

a platí tzv. *podmínka elipticity*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

pro jisté $\theta > 0$, pro všechna $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ a uvažovaná x .

Výsledky: všechna vlastní čísla jsou reálná, vlastních čísel je spočetně mnoho, lze je seřadit do neklesající posloupnosti $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, kdy je $\lambda_1 > 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$.

Je-li λ vlastní číslo a $v(x)$ jemu odpovídající vlastní funkce, pak pro

$$(3.7) \quad u(x, t) = c \cdot e^{-\lambda t} v(x), \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad x \in \overline{U}$$

platí

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 && \text{na } U \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= 0 && \text{na } \partial U \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= c \cdot v(x) \end{aligned}$$

tj. funkce u definovaná ve (3.7) je řešením úlohy (3.1) pokud lze zvolit konstantu c tak, aby platilo, že $c \cdot v(x) = g(x)$ na U . To je však výjimečný případ. Uvažujme vlastní funkce v_k pro $k \in \mathbb{N}$. Pro vhodné konstanty c_k by mohlo platit

$$(3.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot v_k(x) = g(x), \quad x \in U$$

přičemž konvergence je stejnoměrná. Ze (3.1) plyne, že funkce

$$(3.9) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-\lambda_k t} v_k(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \overline{U}$$

pak bude řešením problému (3.1)

Poznámka. 1. Metoda separace proměnných dává pouze funkci ve (3.7). Formule (3.8) a (3.9) plynou z uvažované podmínky $u = g$ na $U \times \{t = 0\}$.

2. Určení konstant c_k je úloha z teorie obecných Fourierových řad

3. Nalezení vlastních čísel a vlastních funkcí může být značně náročné.

Příklad. Nalezněte nějaké nelineární řešení rovnice

$$(u_x)^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (u_y)^2 u_{yy} = 0$$

Položme

$$u(x, y) = v(x) + w(y).$$

Platí

$$\begin{aligned}(v_x)^2 v_{xx} + (w_y)^2 w_{yy} &= 0 \\ (v_x)_x^3 + (w_y)_y^3 &= 0 \\ (v_x)_x^3 = \mu &= -(w_y)_y^3 \\ v_x^3 &= \mu x + c \quad w_y^3 = -\mu y + d \\ v_x &= \sqrt[3]{\mu x + c} \quad w_y = \sqrt[3]{-\mu y + d} \\ v &= \frac{3}{4\mu} (\mu x + c)^{\frac{4}{3}} + C \quad w = -\frac{3}{4\mu} (-\mu y + d)^{\frac{4}{3}} + D\end{aligned}$$

Celkem

$$u(x, y) = \frac{3}{4\mu} \left[\sqrt[3]{(c + \mu x)^4} - \sqrt[3]{(d - \mu y)^4} \right] + E.$$

Přímo lze ověřit, že kupříkladu funkce

$$u(x, y) = (c + x)^{\frac{4}{3}} - (d - y)^{\frac{4}{3}}$$

je řešením

Poznámka. Podobně lze nalézt kupříkladu řešení ve tvaru

$$u(x, t) = w(x) + v(t)$$

pro Hamiltonovu-Jacobiho rovnici.

4 Cauchyho - Kowalevské věta

Uvažujme kvazilineární PDE k -tého řádu v $\mathbb{R}^n$.

$$(4.1) \quad \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x \right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x \right) = 0$$

spolu s Cauchyovými podmínkami zadanými na hyperrovině $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ ve tvaru

$$(4.2) \quad u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = g_1, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}} = g_{k-1}$$

Problém: lze na Γ určit nějaké další hodnoty derivací řešení u , které nejsou obsaženy ve (4.2)?

Protože je Γ nadrovina, obsahuje s každým bodem x také bod $x + e_i$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. To znamená, že pro $x \in \Gamma$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_0(x + he_i) - g_0(x)}{h} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x_i}.$$

Hodnota $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ nelze takto určit, ale známe ji ze (4.2), tj. $\frac{\partial u}{\partial x_n} = g_1(x)$. Na Γ lze tedy stanovit $Du(x)$. Podobně pro $\forall x \in \Gamma$ platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 g_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} & i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_j} & i = n, j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ g_2(x) & i = j = n \end{cases}$$

To znamená, že na Γ lze určit také D^2u . Podobným způsobem dostaneme, že na Γ lze určit celkem $Du, D^2u, \dots, D^{k-1}u$. Komplikace nastane při výpočtu $D^k u$, kdy již nelze použít (4.2) k výpočtu hodnoty $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$. Využijeme toho, že u je řešením (4.1). Za předpokladu, že koeficient $a_{(0,0,\dots,k)}(-)$ ve (4.1) je nenulový, lze psát

$$(4.3) \quad \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k} = \frac{-1}{a_{(0,0,\dots,k)}(-)} \left[\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \neq (0,0,\dots,k)}} a_\alpha(-) D^\alpha u + a_0(-) \right]$$

Protože pro $x \in \Gamma$ známe všechny hodnoty na pravé straně (4.3), lze určit hodnotu $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$, tedy také $D^k u(x)$.

Pokud je podmínka

$$(4.4) \quad a_{(0,0,\dots,k)}(\xi) \neq 0$$

splněna pro libovolné hodnoty argumentu ξ , řekneme, že $\Gamma = \{x_n = 0\}$ je *necharakteristická*. Známe-li pro libovolné $x \in \Gamma$ hodnotu $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$, můžeme definovat funkci

$$g_k: x \mapsto \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}, \quad x \in \Gamma.$$

Touto funkcí lze doplnit (4.2) a pak pomocí (4.2) získat pro libovolné $x \in \Gamma$ všechny parciální derivace $D^{k+1}u(x)$, avšak kromě $\frac{\partial^{k+1}u(x)}{\partial x_n^{k+1}}$. Tuto parciální derivaci obdržíme derivováním (4.1)

podle x_n , kdy $\frac{\partial^{k+1}u(x)}{\partial x_n^{k+1}} = \frac{-1}{a_{(0,0,\dots,k)}(-)} [\dots]$.

To nám umožní najít $D^{k+1}u(x)$, $x \in \Gamma$. Takto lze stanovit všechny parciální derivace řešení Cauchyovy úlohy (4.1), (4.2) na Γ při hladkosti uvažovaných koeficientů a_α , funkcí g_i a řešení u .

Podobné úvahy lze provést pro libovolnou dostatečně hladkou hyperplochu Γ , kde Cauchyova podmínka (4.2) je nahrazena za podmínku

$$(4.5) \quad u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g_1, \dots, \frac{\partial^{k-1}u}{\partial \vec{n}^{k-1}} = g_{k-1} \quad \text{na } \Gamma,$$

kde g_i jsou známé funkce, $\frac{\partial^i u}{\partial \vec{n}^i} = \sum_{|\alpha|=i} D^\alpha u \vec{n}^\alpha = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=i} \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} n_1^{\alpha_1} \dots n_n^{\alpha_n}$ je i -tá normálová derivace u .

Hyperplocha Γ se nazývá *necharakteristická*, jestliže (viz (4.4)) $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha n^\alpha \neq 0$ na Γ .

Také pro obecnou necharakteristickou hyperbolu Γ lze úvahy o určení $D^i u(x)$ na Γ opakovat. Navíc se použije pouze napřímení hyperplochy Γ . Tímto dostáváme:

Věta (Cauchyovo-Kovalevské lemma). *Nechť u je hladké řešení rovnice (4.1), které na necharakteristické hyperploše $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ splňuje Cauchyovy podmínky (4.5). Libovolnou parciální derivaci u na Γ lze vyjádřit pomocí funkcí $g_0, g_1, \dots, g_{k-1}$, koeficientů a_α ($|\alpha| = k$) a a_0 .*

Předpokládejme, že je dána kvazilineární PDE (4.1) s analytickými Cauchyho daty (4.5), která platí na analytické necharakteristické hyperploše Γ . Navíc lze předpokládat, že všechna Cauchyho data jsou identicky nulová a že $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Lze dokázat, že tento předpoklad je bez újmy na obecnosti. Tím se úloha (4.1), (4.5) převede na tvar

$$(4.6) \quad \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x \right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x \right) = 0,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_n^{k-1}} = 0, \quad x_n = 0.$$

Úlohu (4.6) nahradíme úlohou pro systém rovnic prvního řádu

$$(4.7) \quad \vec{u}_{x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \vec{B}_j(\vec{u}, x) \vec{u}_{x_j} + \vec{c}(\vec{u}, x), \quad |x| < r,$$

$$\vec{u} = 0, \quad x_n = 0, \quad \vec{u} = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_n^{k-1}} \right).$$

Věta (Cauchyova-Kovalevské). *Nechť v úloze (4.7) jsou $\vec{B}_j$ pro všechna uvažovaná j a $\vec{c}$ analytické. Potom existuje $r > 0$ a (reálná) analytické funkce $\vec{u}$, která je řešením (4.7).*

Poznámka. Úloha (4.6) je speciálním případem (4.7). Z analytičnosti plyne jednoznačnost řešení.

5 Rovnice prvního řádu

PDE prvního řádu má tvar

$$F(Du, u, x) = 0,$$

kde $x \in U$ pro jistou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^n$. $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ je známá funkce a $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ je hledaná funkce. Označme

$$F = F(p, z, x) = F(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n),$$

kde $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Dále označme

$$D_p F = (F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_n}), \quad D_z F = F_z, \quad D_x F = (F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_n}).$$

5.1 Metoda charakteristik

Uvažujme rovnici

$$(5.1.1) \quad F(Du, u, x) = 0 \quad \text{na } U$$

spolu s okrajovou podmínkou

$$(5.1.2) \quad u = g \quad \text{na } \Gamma,$$

kde $\Gamma \subseteq \partial U$ a $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkce. Necht F a g jsou dostatečně hladké funkce. Metoda charakteristik řeší úlohu (5.1.1), (5.1.2) tak, že ji převádí na řešení počáteční úlohy pro systém ODE. Předpokládejme, že (5.1.1), (5.1.2) má řešení u . Zvolme libovolně bod $x \in U$. Necht jsme schopni určovat hodnoty u na jistých křivkách ležících v $\bar{U}$. Necht jedna taková křivka prochází právě bodem $x = \vec{x}(1)$ a současně bodem $x^0 = \vec{x}(0) \in \Gamma$. Protože známe hodnoty u na (hranici) Γ , je jistá možnost, že určíme u podél $\vec{x}$.

Uvažujme, že uvedená křivka bude popsána jako

$$\vec{x}(s) = (x^1(s), x^2(s), \dots, x^n(s)) = (x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)),$$

kde s je parametr z jistého subintervalu reálné osy, a že u je třídy C^2 . Na křivce $\vec{x}(s)$ definujeme

$$(5.1.3) \quad z(s) = u(\vec{x}(s))$$

$$(5.1.4) \quad \vec{p}(s) = Du(\vec{x}(s))$$

podrobněji psáno $\vec{p}(s) = (p^1(s), \dots, p^n(s)) = (p_1(s), \dots, p_n(s))$, kde

$$(5.1.5) \quad p_i(s) = u_{x_i}(\vec{x}(s)) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Problém zůstává, jak můžeme najít takovou křivku $\vec{x}$, abychom byli schopni hodnoty z a p určit. Derivováním (5.1.5) dostáváme

$$(5.1.6) \quad [p_i(s)]' = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\vec{x}(s)) \cdot [x^j(s)]'.$$

Současné derivováním (5.1.1) podle x_i na křivce $\vec{x}$ získáváme

$$\begin{aligned} D_{x_i} F(Du(x), u(x), x) &= \\ &= D_{x_i} F(u_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{x_n}(x_1, \dots, x_n), u(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = \\ &= D_{x_i} F(p_1, \dots, p_n, z, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} (Du, u, x) u_{x_i x_j} + \frac{\partial F}{\partial z} (Du, u, x) u_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} (Du, u, x) = 0 \end{aligned}$$

To lze na $\vec{x}$ zapsat jako

$$(5.1.7) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} (\vec{p}, z, \vec{x}) u_{x_i x_j} (\vec{x}) + \frac{\partial F}{\partial z} (\vec{p}, z, \vec{x}) u_{x_i} (\vec{x}) + \frac{\partial F}{\partial x_i} (\vec{p}, z, \vec{x}) = 0,$$

kde $\vec{p} = \vec{p}(s)$, $z = z(s)$ a $\vec{x} = \vec{x}(s)$.

Kdyby navíc platilo

$$(5.1.8) \quad [x^j(s)]' = \frac{\partial F}{\partial p_j} (\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

tak by bylo možné vyjádřit (5.1.6) pomocí (5.1.5), (5.1.7) a (5.1.8) jako

$$[p^i(s)]' = -\frac{\partial F}{\partial z} (\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) p^i(s) - \frac{\partial F}{\partial x_i} (\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

To je systém n ODE pro $2n + 1$ neznámých. Dalšíh n rovnic získáme z (5.1.8) a poslední rovnici získáme derivováním $z(s) = u(\vec{x}(s))$ (viz (5.1.3)) jako

$$z'(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} (\vec{x}(s)) \cdot [x^j(s)]' = \sum_{j=1}^n p^j(s) \cdot \frac{\partial F}{\partial p_j} (\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)).$$

Získaný systém $2n + 1$ ODE prvního řádu ve tvaru

$$(5.1.9) \quad \begin{aligned} [\vec{p}(s)]' &= -D_x F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) - D_z F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) \cdot \vec{p}(s) \\ z'(s) &= D_p F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) \cdot \vec{p}(s) \\ [\vec{x}(s)]' &= D_p F(\vec{p}(s), z(s), \vec{x}(s)) \end{aligned}$$

je tvořen tzv. *charakteristickými rovnicemi* (nelineární) PDE (5.1.1). Řešení systému (5.1.9) se nazývají *charakteristiky*.

Shrnutí: Hledáme křivky zvané *charakteristiky* a to spočívá v řešení jisté soustavy ODE. Podél těchto křivek PDE přechází na ODE.

Příklad. Uvažujme nelineární okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} u_{x_1} u_{x_2} &= u & \text{na } U &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\} \\ u &= x_2^2 & \text{na } \Gamma &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\} \end{aligned}$$

Přepíšeme do standardního tvaru

$$F(p, z, x) = p_1 p_2 - z$$

Systém (5.1.9) je tvaru

$$\begin{aligned}x_1' &= p_2 & p_1' &= p_1 \\x_2' &= p_1 & p_2' &= p_2 \\z' &= 2p_1p_2\end{aligned}$$

Řešení

$$\begin{aligned}p_1(s) &= p_0^1 e^s & p_0^1 &= \frac{x_0}{2} \\p_2(s) &= p_0^2 e^s & p_0^2 &= 2x_0 \\z(s) &= z_0 + p_0^1 p_0^2 (e^{2s} - 1) & z_0 &= (x_0)^2 \\x_1(s) &= x_0^1 + p_0^2 (e^s - 1) & x_0^1 &= 0 \\x_2(s) &= x_0^2 + p_0^1 (e^s - 1) & x_0^2 &= x_0\end{aligned}$$

Protože potřebujeme, aby pro $s = 0$ bylo $(x_1(s), x_2(s)) \in \Gamma$, je třeba položit

$$x_0^1 = 0, \quad x_0^2 = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Ze $z(s) = u(\vec{x}(s))$ dostáváme pro $s = 0$, že

$$(x_0)^2 = u(\vec{x}_0) = z(0) = z_0 + p_0^1 p_0^2 (e^0 - 1) = z_0.$$

Zbývá určit hodnoty p_0^1 a p_0^2 , přičemž $p_i(s) = u_{x_i}(\vec{x}(s))$. Odtud pro $s = 0$ plyne

$$p_0^2 = p_2(0) = u_{x_2}(0, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2)^2|_{x_2=x_0} = 2x_0.$$

Z analogické rovnice pro p_1 nelze odvodit hodnotu p_0^1 (nejsme na hranici U). Platí však

$$p_1(s)p_2(s) = u_{x_1}(\vec{x}(s))u_{x_2}(\vec{x}(s)) = u(\vec{x}(s))$$

viz zadání úlohy. Dosazením $s = 0$ dostáváme

$$p_0^1 p_0^2 = z_0 = (x_0)^2 \quad p_0^1 = \frac{x_0}{2} \quad \text{spojité prodloužení.}$$

Řešení (5.1.9) lze tedy zapsat jako

$$\begin{aligned}x_1(s) &= 2x_0(e^s - 1) & z(s) &= (x_0)^2 e^{2s} & p_1(s) &= \frac{x_0}{2} e^s \\x_2(s) &= \frac{x_0}{2}(e^s + 1) & & & p_2(s) &= 2x_0 e^s\end{aligned}$$

Zvolme libovolně bod $(x_1, x_2) \in U$. Pokud existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ a $s > 0$ tak, že $(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (2x_0(e^s - 1), \frac{x_0}{2}(e^s + 1))$, je nutně

$$x_0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}, \quad e^s = \frac{4x_2 + x_1}{4x_2 - x_1}.$$

Pro tato x_0, s je

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = (x_0)^2 e^{2s} = \left(\frac{4x_2 - x_1}{4} \frac{4x_2 + x_1}{4x_2 - x_1} \right)^2 = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}.$$

Nyní je třeba ověřit, zda se jedná o řešení.

5.2 Homogenní lineární rovnice

Homogenní lineární rovnice je tvaru

$$(5.2.1) \quad \vec{b}(x) Du(x) + c(x)u(x) = 0 \quad \text{na } U$$

tj.

$$\sum_{j=1}^n b_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, \dots, x_n)u = 0.$$

Nyní je

$$F(p, z, x) = \vec{b}(x) \cdot p + c(x) \cdot z,$$

a tudíž

$$D_p F(p, z, x) = \vec{b}(x).$$

Charakteristické rovnice jsou proto

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s)), \\ z'(s) &= \vec{b}(\vec{x}(s)) \cdot \vec{p}(s) = -c(\vec{x}(s)) \cdot z(s). \end{aligned}$$

V tomto případě rovnice pro p nejsou potřeba a charakteristický systém je právě

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s)), \\ z'(s) &= -c(\vec{x}(s)) \cdot z(s). \end{aligned}$$

Příklad. Řešme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} &= u & \text{na } U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}, \\ u &= g & \text{na } \Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Rovnice uvažované úlohy je tvaru (5.2.1) pro $\vec{b}(x) = (-x_2, x_1)$, $c = -1$.

Charakteristický systém rovnic je

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_1 \\ z' &= z \end{aligned}$$

Nalezneme řešení $\vec{x}$ pro $s = 0$ prochází bodem $(x_1^0, 0) \in \Gamma$.

$$\vec{x}(s) = (x_1(s), x_2(s)) = (x_1^0 \cos s, x_1^0 \sin s)$$

Podobně se vidí, že

$$z(s) = z^0 e^s = u(x_1^0, 0) e^s = g(x_1^0) e^s.$$

Ukážeme, že jsme schopni se dostat pomocí trajektorií do celého U . Zvolme libovolně bod $(x_1, x_2) \in U$. Pak $\exists! x_1^0 > 0 \exists! s \in (0, \frac{\pi}{2})$ tak, že $(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (x_1^0 \cos s, x_1^0 \sin s)$. Očividně je

$$x_1^0 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}, \quad s = \arctg \frac{x_2}{x_1}$$

Celkem

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = g(x_1^0) e^s = g\left(\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}\right) e^{\operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}.$$

Lze snadno ověřit, že jde o řešení zadaného problému, když $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$.

Poznámka. Nechť je $c \equiv 0$, potom je každá funkce u , která je řešením (5.2.1), konstantní podél charakteristik. Obráceně, rovnici (5.2.1) vyhovuje každá funkce u třídy C^1 , která je konstantní podél všech charakteristik. Nechť $(x_1, x_2) \in U$. Protože podél $\vec{x}$, která prochází bodem (x_1, x_2) , je funkce u konstantní, tj.

$$\varphi(t) = u(x_1(t), x_2(t)) = u(x^1(t), x^2(t)) = \text{konst}$$

její derivace splňuje

$$0 = \varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot x_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} b_2$$

Funkce u je proto řešením.

5.3 Kvazilineární rovnice

Kvazilineární rovnice prvního řádu je tvaru

$$(5.3.1) \quad \vec{b}(x, u(x)) Du(x) + c(x, u(x)) = 0 \quad \text{na } U,$$

tj.

$$\sum_{j=1}^n b_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad \text{na } U.$$

Nyní je

$$F(p, z, x) = \vec{b}(x, z) \cdot p + c(x, z),$$

a tedy

$$D_p F(p, z, x) = \vec{b}(x, z).$$

Charakteristické rovnice tedy jsou

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s), z(s)) \\ z'(s) &= \vec{b}(\vec{x}(s), z(s)) \cdot \vec{p}(s) = -c(\vec{x}(s), z(s)) \end{aligned}$$

Znovu se charakteristické rovnice pro $\vec{p}$ neuplatní, a proto je celý charakteristický systém (5.3.1) tvaru

$$(5.3.2) \quad \begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s), z(s)), \\ z'(s) &= -c(\vec{x}(s), z(s)). \end{aligned}$$

Příklad. Najděte řešení okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} &= u^2 & \text{na } U &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}, \\ u &= g & \text{na } \Gamma &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Rovnice této úlohy je tvaru (5.3.1) pro $\vec{b}(x, u) = (1, 1)$, $c = -u^2$. Charakteristický systém je

$$\begin{aligned} x'_1 &= 1 \\ x'_2 &= 1 \\ z' &= z^2 \end{aligned}$$

Řešení charakteristického systému, které pro $s = 0$ nabývá hodnoty $(x^0, 0) \in \Gamma$ je

$$\begin{aligned} x_1(s) &= x^0 + s \\ x_2(s) &= s \end{aligned}$$

a dále $\frac{1}{z(0)} - \frac{1}{z(s)} = s$. Je tedy

$$z(s) = \frac{z_0}{1 - sz(0)} = \frac{u(x^0, 0)}{1 - su(x^0, 0)} = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)}, \quad \text{pokud } sg(x^0) \neq 1.$$

Opět testujeme, zda pokryjeme celé U . Zvolme proto $(x_1, x_2) \in U$ libovolně. Pak $\exists! x^0 \in \mathbb{R}$ $\exists! s > 0$ tak, že $(x_1, x_2) = (x_0 + s, s)$. Zřejmě $s = x_2$, $x^0 = x_1 - x_2$. Celkem

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2g(x_1 - x_2)},$$

pokud $1 \neq x_2g(x_1 - x_2)$. Lze ověřit, že jde o řešení, když $g \in C^1(\mathbb{R})$.

5.4 Napřimování hranice a existence řešení

Znovu budeme uvažovat okrajovou úlohu

$$(5.4.1) \quad F(Du, u, x) = 0 \quad \text{na } U,$$

$$(5.4.2) \quad u = g \quad \text{na } \Gamma.$$

Hledejme řešení rovnice (5.4.1), které by bylo definováno alespoň na jisté nadmnožině Γ a na Γ splňovalo (5.4.2), přičemž $F \in C^1$. Lze očekávat, že příslušné úvahy a výpočty budou jednodušší, pokud množina Γ bude „jednoduchá“, například část hyperroviny. Toho lze dosáhnout alespoň lokálně v okolí zvoleného bodu $x^0 \in \Gamma \subseteq \partial U$ vhodnou transformací souřadnic za (pro nás implicitním) předpokladu, že v okolí bodu x^0 je hranice ∂U alespoň třídy C^1 (viz podkapitola 1.6). Připomeňme, že se uvažuje transformace $\Phi: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, kdy

$$(5.4.3) \quad \begin{aligned} y_i &= \Phi^i(x) = x_i, & i &\in \{1, \dots, n-1\} \\ y_n &= \Phi^n(x) = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

a k ní inverzní transformace Ψ . Základní problém je, jak se po transformaci (5.4.3) změní rovnice (5.4.1). Uvažme řešení $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ rovnice (5.4.1), označme $V = \Phi(U)$ a položme

$$(5.4.4) \quad v(y) = u(\Psi(y)), \quad y \in V,$$

$$(5.4.5) \quad u(x) = v(\Phi(x)), \quad x \in U.$$

Derivování (5.4.5) dává

$$Du(x) = Dv(\Phi(x)) \cdot D\Phi(x),$$

což po dosazení do (5.4.1) s užitím (5.4.4) a (5.4.5) dává

$$0 = F(Dv(y) D\Phi(\Psi(y)), v(y), \Psi(y)) = G(Dv(y), v(y), y), \quad y \in V$$

Dále se při této transformaci transformuje též množina Γ . Označme

$$\begin{aligned} \Delta &= \Phi(\Gamma), \\ h(y) &= g(\Psi(y)). \end{aligned}$$

Celkem úloha (5.4.1), (5.4.2) přešla na úlohu

$$\begin{aligned} G(Dv, v, y) &= 0 && \text{na } V, \\ v &= h && \text{na } \Delta. \end{aligned}$$

Vzhledem k předchozí úvaze lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro každý bod $x^0 \in \Gamma$ je v jeho okolí množina $\Gamma \subseteq \partial U \subset \mathbb{R}^n$ hyperrovina ležící v $\mathbb{R}^n$ určená rovnicí $x_n = 0$. Víme, že je-li $u \in C^2$ řešením (5.4.1) na U , pak jeho hodnoty na systému křivek $\vec{x}$ lze získat řešením charakteristického systému, který je uzavřený vzhledem k $\vec{p}, z, \vec{x}$. Nás zajímá řešení u definované v blízkosti $x^0 \in \Gamma$. Protože známe u prostřednictvím charakteristického systému a protože mezi $\vec{p}, z, \vec{x}$ existují vztahy

$$(5.4.6) \quad \begin{aligned} z(s) &= u(\vec{x}(s)), \\ \vec{p}(s) &= Du(\vec{x}(s)), \end{aligned}$$

je otázka, zda je vůbec možné systém počátečních podmínek realizovat (zda není prázdný). Má platit

$$\vec{p}(0) = p^0, \quad z(0) = z^0, \quad \vec{x}(0) = x^0 \in \Gamma.$$

Současně

$$(5.4.7) \quad z^0 = u(\vec{x}(0)) = u(x^0) = g(x^0).$$

Zbývá určit p^0 . Z (5.4.6) plyne, že pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že

$$p^i(s) = u_{x_i}(\vec{x}(s)).$$

Navíc z (5.4.2) a z tvaru $\Gamma = \{x_n = 0\}$ plyne, že na okolí bodu x^0 je $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ tj. v bodě x^0 je $u_{x_i}(x^0) = g_{x_i}(x^0)$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. To je pouze $n-1$ podmínek pro n neznámých. Další podmínku lze získat z (5.4.1). Celkem n neznámých $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ je určeno n podmínkami

$$(5.4.8) \quad \begin{aligned} p_i^0 &= g_{x_i}(x^0) \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ F(p^0, z^0, x^0) &= 0 \end{aligned}$$

Postavení podmínek (5.4.7) a (5.4.8) je různé. Zatímco (5.4.7) zajišťuje jednoznačnou existenci z^0 danou funkcí g z (5.4.2) a volbou x^0 , vektor p^0 , který by byl řešením (5.4.8), nemusí vůbec existovat, případně (5.4.8) může připouštět více řešení p^0 .

Definice. Podmínky (5.4.7), (5.4.8) nazýváme *podmínkami kompatibility*.

Každou trojici $(p^0, z^0, x^0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, která tyto podmínky splňuje, nazýváme *přípustnou*.

Poznámka. Vedle toho, že bod $x^0 \in \Gamma$ a že na jistém okolí bodu x^0 je Γ část hyperroviny, budeme dále předpokládat, že (p^0, z^0, x^0) je přípustná.

Neboť nás zajímá řešení u rovnice (5.4.1) na jistém okolí bodu $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0) \in \Gamma$, musíme umět stanovit počáteční podmínky systému

$$(5.4.9) \quad \begin{aligned} \vec{p}(0) &= \vec{q}(y), \\ z(0) &= g(y), \\ \vec{x}(0) &= y. \end{aligned}$$

pro všechny body $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \Gamma$ dostatečně blízké bodu x^0 . Protože funkci g známe, je třeba najít zobrazení $\vec{q}(x) = (q_1(x), \dots, q_n(x))$ tak, aby

$$(5.4.10) \quad \vec{q}(x^0) = p^0$$

a aby pro každé $y \in \Gamma$ blízké bodu x^0 byly splněny podmínky

$$(5.4.11) \quad \begin{aligned} q_i(y) &= g_{x_i}(y) \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ F(\vec{q}(y), g(y), y) &= 0. \end{aligned}$$

Nástrojem k řešení (5.4.10), (5.4.11) je věta o implicitní funkci. S ohledem na to, že trojice (p^0, z^0, x^0) je přípustná, platí, že $F(p^0, z^0, x^0) = 0$. Druhý předpoklad věty o implicitní funkci vyžaduje, aby platilo

$$(5.4.12) \quad F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.$$

Definice. Každá přípustná trojice (p^0, z^0, x^0) se nazývá *necharakteristická*, jestliže splňuje podmínku (5.4.12).

Věta. *Nechť (p^0, z^0, x^0) je necharakteristická (přípustná) trojice. Potom existuje jediné řešení $\vec{q}$ systému (5.4.10), (5.4.11), které je definované pro všechna $y \in \Gamma$ dostatečně blízká x^0 .*

Poznámka. V případě obecné hranice ∂U je pro $x^0 \in \Gamma$ podmínka (5.4.12) tvaru

$$D_p F(p^0, z^0, x^0) \cdot \vec{n}(x^0) \neq 0,$$

kde $\vec{n}(x^0)$ je jednotkový vektor vnější normály k ∂U v bodě x_0 .

Předpokládejme, že v okolí bodu x^0 je $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ a že (p^0, z^0, x^0) je necharakteristická přípustná trojice. Podle výše uvedené věty $\exists \vec{q}$ t.ž. $\vec{q}(x^0) = p^0$ a že trojice $(\vec{q}(y), g(y), y)$ je přípustná $\forall y$ dostatečně blízká x^0 . Dále budeme pracovat pouze

s prvky $y \in \Gamma$ tj. s body $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = (\tilde{y}, 0)$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Pro libovolný takový bod $y = (\tilde{y}, 0)$ existuje řešení počáteční úlohy charakteristického systému a (5.4.9) jako

$$\begin{aligned}\vec{p}(s) &= \vec{p}(y, s) = \vec{p}(\tilde{y}, s), \\ z(s) &= z(y, s) = z(\tilde{y}, s), \\ \vec{x}(s) &= \vec{x}(y, s) = \vec{x}(\tilde{y}, s).\end{aligned}$$

Podrobněji si všimneme poslední rovnice. Pro $s = 0$ je $\vec{x}(0) = \vec{x}(y, 0) = \vec{x}(\tilde{y}, 0)$. Odtud

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_i}(\tilde{x}^0, 0) = \begin{cases} \delta_{ij} & i \in \{1, \dots, n-1\} \\ 0 & i = n \end{cases}$$

kde $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Derivace funkce $\vec{x}(\tilde{y}, s)$ podle „ n -té proměnné“ s lze určit z charakteristického systému (5.1.9) jako

$$\frac{\partial x^j}{\partial s}(\tilde{x}^0, 0) = \frac{\partial x^j}{\partial s}(\tilde{x}^0 s)|_{s=0} = F_{p_j}(p^0, z^0, x^0), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Celkem

$$\det D\vec{x}(\tilde{x}^0, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & F_{p_1}(p^0, z^0, x^0) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & F_{p_2}(p^0, z^0, x^0) \\ & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & F_{p_{n-1}}(p^0, z^0, x^0) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix} = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.$$

Věta o inverzní funkci říká, že rovnice

$$(5.4.13) \quad x = \vec{x}(\tilde{y}, s)$$

má alespoň lokální řešení

$$(5.4.14) \quad \begin{aligned}\tilde{y} &= \tilde{y}(x), \\ s &= s(x).\end{aligned}$$

pro x z jistého okolí V bodu $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Věta. Funkce $u: V \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$u(x) = z(\tilde{y}(x), s(x)), \quad x \in V$$

kde $V, \tilde{y}, s$ jsou z (5.4.13), (5.4.14), jsou třídy C^2 a řeší okrajovou úlohu

$$\begin{aligned}F(Du(x), u(x), x) &= 0 & x \in V \cap U, \\ u(x) &= g(x) & x \in \Gamma \cap V.\end{aligned}$$

6 Metoda Fourierovy transformace

6.1 Konvoluce

Nechť funkce f a g jsou měřitelné na $\mathbb{R}^n$. *Konvolucí* těchto funkcí nazýváme funkci $f * g$ definovanou jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \cdot g(y) \, dy$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, pro která integrál na pravé straně existuje.

Věta. *Pokud všechny uvažované integrály existují, pak platí*

- (a) $f * g = g * f$
- (b) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (c) *je-li pro $z \in \mathbb{R}^n$ zobrazení τ_z translace, která přiřadí funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkci $\tau_z f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\tau_z f(x) = f(x - z)$, $x \in \mathbb{R}^n$, pak platí $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$*
- (d) *nosič konvoluce f a g $\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$ (nosič je uzávěr množiny, vně které se funkce nuluje)*

Důkaz. (a) $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(x - z) \, dz = (g * f)(x)$

(b)

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(y) h(x - y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y - z) \, dz \right) h(x - y) \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y - z) h(x - y) \, dz \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y - z) h(x - y) \, dy \right) dz = \\ &= \left| \frac{\xi = y - z}{d\xi = dy} \right| = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) h(x - z - \xi) \, d\xi \right) dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g * h)(x - z) \, dz = \\ &= [f * (g * h)](x). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} [\tau_z(f * g)](x) &= (f * g)(x - z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z - y) g(y) \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_z f(x - y) g(y) \, dy = [(\tau_z f) * g](x) \\ \tau_z(f * g) &= \tau_z(g * f) = (\tau_z g) * f = f * (\tau_z g) \end{aligned}$$

- (d) Předpokládejme, že $(f * g)(x) \neq 0$ pro jisté $x \in \mathbb{R}^n$ a sporem, že $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$, tj. není možné psát $x = y + z$, kde $y \in \text{supp } f$, $z \in \text{supp } g$. Pro libovolné $z \in \text{supp } g$ je tedy $x - z \notin \text{supp } f$. Tudíž vždy $f(x - z) g(z) = 0$. To je ovšem spor s tím, že $(f * g)(x) \neq 0$. $\square$

6.2 Aproximace hladkými funkcemi

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná otevřená množina. Pro $\epsilon > 0$ položíme

$$U_\epsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}.$$

Uvažujme funkci $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou jako

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Pomocí matematické indukce lze ukázat, že $h^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}$, $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$, kde P_n je polynom stupně $2n$. Odtud plyne $h^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Funkce $h(1 - |x|^2) = h(1 - |x_1|^2 - \dots - |x_n|^2)$ je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^n$. Dokonce tato funkce patří do třídy $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, protože pro $|x| \geq 1$ je $h(1 - |x|^2) = 0$. Existuje pak konstanta $c > 0$ taková, že $\frac{1}{c} = \int_{\mathbb{R}^n} h(1 - |x|^2) dx = \int_{B(0,1)} h(1 - |x|^2) dx$. Z toho vyplývá, že funkce $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\eta(x) = \begin{cases} c \cdot e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

je nezáporná, $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ a je $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$. Pro $a > 0$ dále položíme

$$\eta_a(x) = \frac{1}{a^n} \eta\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zřejmě je η_a nezáporná, $\eta_a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_a(x) dx = 1$ a navíc $\eta_a(x) > 0 \Leftrightarrow |x| < a$. Této funkci η_a se říká *regularizační funkce* nebo také *vyhlazovací jádro*.

Uvažujme funkci $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $\int_U f(x) dx$ existuje. Potom pro libovolné $\epsilon > 0$ lze na množině U_ϵ definovat funkci

$$f^\epsilon = \eta_\epsilon * f$$

tj. pro $\forall x \in U_\epsilon$ klademe

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y) f(x - y) dy.$$

Funkce f^ϵ se nazývá *regularizace funkce f* a má vlastnosti

1. $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$
2. $f^\epsilon \rightarrow f$ pro $\epsilon \rightarrow 0$ skoro všude (na U , resp. $U_\epsilon \rightarrow U$ pro $\epsilon \rightarrow 0$)
3. jestliže $f \in C(U)$, tj. je spojitá, pak $f^\epsilon \rightarrow f$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny U
4. jestliže $f \in L^p_{(loc)}(U)$ pro $p \in [1, \infty)$, pak $\|f^\epsilon - f\|_{L^p_{(loc)}(U)} \rightarrow 0$ pro $\epsilon \rightarrow 0$

6.3 Fourierova transformace

V této podkapitole budeme uvažovat funkce nabývající komplexních hodnot.

Definice. Pro funkci $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme její *Fourierovu transformaci* jako

$$(6.3.1) \quad \mathcal{F}u(y) = \hat{u}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(x) \, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

a její *inverzní Fourierovu transformaci* jako

$$\check{u}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} u(x) \, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka. Poznamenejme, že tato definice je korektní, neboť

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{\pm ixy} u(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| \, dx < \infty.$$

V teorii PDE potřebujeme, aby Fourierova transformace byla definovaná na celém prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ovšem $L^2(\mathbb{R}^n)$ netvoří podmnožinu $L^1(\mathbb{R}^n)$. Lze však ukázat, že $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, když $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Navíc zobrazení $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$, $\mathcal{F}: u \rightarrow \hat{u}$ je izometrické (v $L^2(\mathbb{R}^n)$ normě), tj.

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Toto izometrické zobrazení lze s využitím úplnosti $L^2(\mathbb{R}^n)$ rozšířit na izometrii $L^2(\mathbb{R}^n)$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Příslušné rozšíření se také označuje za Fourierovu transformaci (na $L^2(\mathbb{R}^n)$) respektive se mluví o *Plancherelově transformaci*.

Věta (Plancherelova). *Nechť $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, potom $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a platí*

$$(6.3.2) \quad \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Důkaz. Uvažme pouze $\hat{u}$, tvrzení pro $\check{u}$ se provede analogicky.

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pro $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\hat{f}(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = \text{konst} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Odkud plyne

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \inf\{\alpha; |\hat{f}(x)| \leq \alpha \text{ s.v. } x \in \mathbb{R}^n\} \leq \text{konst} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

tj. $\hat{f}, \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále je

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(x) g(y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(y) \, dy$$

Pro $\forall \epsilon > 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) e^{-\epsilon|y|^2} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \widehat{e^{-\epsilon|y|^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\epsilon)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} dx \end{aligned}$$

$$(6.3.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) e^{-\epsilon|y|^2} dy = \frac{1}{\sqrt{(2\epsilon)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} dx.$$

Pro $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ položíme $v(x) = \bar{u}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $w = u * v$.
Lze ukázat, že $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Pro $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned} \widehat{w}(y) &= \widehat{u * v}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}^n} u(z) v(x-z) dz dx = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy} u(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z)y} v(x-z) dx dz = \widehat{v}(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy} u(z) dz = \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{u}(y) \widehat{v}(y) \end{aligned}$$

$$\widehat{v}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \bar{u}(-x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(-x)y} u(-x) dx} = \overline{\widehat{u}(y)}$$

Celkem

$$\widehat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\widehat{u}|^2$$

s využitím spojitosti w získáváme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2\epsilon)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} dx = w(0) \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

To spolu s (6.3.3) dává

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot w(0).$$

Odtud

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(y)|^2 dy &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(y) dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(-x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \bar{u}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Tedy

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Plancherelova věta nám dává již zmíněnou možnost definovat Fourierovu transformaci na celém $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pro libovolnou funkci $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ volme posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ takovou, že $u_i \rightarrow u$ pro $i \rightarrow \infty$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Vzhledem k (6.3.1) a (6.3.2) platí

$$\|\widehat{u_i} - \widehat{u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_i - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_i - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

To znamená, že posloupnost $\{\widehat{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Protože je $L^2(\mathbb{R}^n)$ úplný, existuje limita posloupnosti $\{\widehat{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$, kterou označme jako $\widehat{u}$. Je zřejmé, že $\widehat{u}$ nezávisí na zvolené posloupnosti $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, tj. zavedení $\widehat{u}$ je korektní. Podobně lze zavést také $\widehat{v}$.

Věta. Pro libovolné funkce $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \overline{v}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x) \cdot \overline{\widehat{v}}(x) \, dx.$$

Důkaz. Necht $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak platí

$$\|u + \alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\widehat{u} + \alpha \widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u + \alpha v) (\overline{u} + \overline{\alpha v}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{u} + \alpha \widehat{v}) (\overline{\widehat{u}} + \overline{\alpha \widehat{v}}) \\ \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + \alpha v \overline{u} + \overline{\alpha v} u + |\alpha v|^2) &= \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}|^2 + \alpha \widehat{v} \overline{\widehat{u}} + \overline{\alpha \widehat{v}} \widehat{u} + |\alpha \widehat{v}|^2) \\ \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \overline{u} v + \overline{\alpha} u \overline{v}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \overline{\widehat{u}} \widehat{v} + \overline{\alpha} \widehat{u} \overline{\widehat{v}}) \end{aligned}$$

Zvolme $\alpha = 1$

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(\overline{u} v) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u} v + \overline{\overline{u} v} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{u}} \widehat{v} + \overline{\overline{\widehat{u}} \widehat{v}} = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(\overline{\widehat{u}} \widehat{v}).$$

Pro $\alpha = i$ pak podobně platí

$$2i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im}(\overline{u} v) = 2i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im}(\overline{\widehat{u}} \widehat{v}).$$

Sečtením a odečtením dvou identit a vydělením dvěma dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u} v = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{u}} \widehat{v}$$

□

Věta. Pro každý multiindex α a funkci $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, je

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (iy)^\alpha \cdot \widehat{u}(y) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz. Využije se toho, že $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ je hustá množina v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Lze se omezit na funkci $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pro kterou

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} D^\alpha u(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha (e^{-ixy}) u(x) \, dx = (iy)^\alpha \widehat{u}(y).$$

□

Věta. Pro $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ platí $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{u} \widehat{v}$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Plyne z důkazu Plancherelovy věty. □

Věta. Pro každou funkci $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ je $u = (\hat{u})^\sim v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Pro libovolné $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ je

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \check{u}(x) v(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} u(y) \, dy v(x) \, dx = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} u(y) v(x) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} v(x) \, dx \right) \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \check{v}(y) \, dy, \end{aligned}$$

$$\check{v}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} v(x) \, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \bar{v}(x) \, dx} = \overline{\bar{\check{v}}}(y)$$

Proto je

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u})^\sim(x) \cdot \bar{v}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) \check{\bar{v}}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) \bar{\check{v}}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \bar{v}(x) \, dx$$

to jest

$$\langle (\hat{u})^\sim - u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} [(\hat{u})^\sim - u] \bar{v} = 0$$

pro libovolné $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Jediný prvek $L^2(\mathbb{R}^n)$ ortogonální ke všem ostatním je nulový prvek, tj. $(\hat{u})^\sim = u$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Příklad. Uvažujme rovnici

$$-\Delta u + u = f \quad \text{na } \mathbb{R}^n,$$

kde $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Víme, že

$$D^{(0,0,\dots,0,2,0,\dots,0)} u(x) = (ix_i)^2 \hat{u}(x)$$

a tudíž

$$(-\Delta u + u)^\sim(x) = |x|^2 \hat{u}(x) + \hat{u}(x).$$

Zadaná rovnice přejde na

$$(1 + |x|^2) \hat{u}(x) = \hat{f}(x),$$

což je algebraická rovnice s řešením

$$\hat{u}(x) = \frac{\hat{f}(x)}{1 + |x|^2}, \quad u(x) = \left[\frac{\hat{f}(y)}{1 + |y|^2} \right]^\sim(x).$$

Zkráceně psáno

$$u = \left[\frac{\hat{f}(y)}{1 + |y|^2} \right]^\sim = \left(\hat{f}(y) \left[\left(\frac{1}{1 + |y|^2} \right) \right]^\sim \right)^\sim = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f * \left(\frac{1}{1 + |y|^2} \right)^\sim.$$

Zbývá stanovit $\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^\sim$, což lze učinit kupříkladu pomocí teorie funkcí komplexní proměnné se ziskem

$$\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^\sim(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}} dt, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Lze ověřit, že funkce

$$u(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-t-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}} f(y) dy dt, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

je řešením zadané rovnice.

7 Laplaceova a Poissonova rovnice

Laplaceova rovnice je tvaru

$$(7.1) \quad \Delta u = 0 \quad \text{na } U$$

a rovnice Poissonova je tvaru

$$(7.2) \quad -\Delta u = f \quad \text{na } U,$$

kde $u: \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U je otevřená množina. Tyto rovnice bývají doplněny jednou z podmínek (nejčastěji při ohraničenosti U) pro $g: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ se uvažuje

(a) Dirichletova podmínka

$$u(x) = g(x) \quad x \in \partial U,$$

(b) Neumannova podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x) \quad x \in \partial U.$$

Uvažujme komplexní funkci komplexní proměnné $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, která je holomorfní. S ohledem na identifikaci $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lze psát $z \in \mathbb{C}$ jako $z = x + iy$ a tedy $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde u je reálná část, v imaginární část f , přičemž $u, v: U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Platí

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} - \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Protože $f'(z)$ existuje, existují i obě dvojnásobné limity a konečně existují také ve směrem $(\Delta x, 0)$ a $(0, \Delta y)$, kdy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme tzv. *Cauchyovy-Riemannovy* podmínky (též rovnice)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Neboť má f derivace všech řádů, je $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, $v_{yy} = u_{xy} = -v_{xx}$. To znamená, že reálná i imaginární část holomorfní funkce vyhovuje rovnici (7.1), tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{na } U.$$

Definice. Funkce $u \in C^2(U)$ splňující Laplaceovu rovnici se nazývá *harmonická*.

Ve skalárním případě $n = 1$ je řešení (7.1) triviální. Pokud je $U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, pak každá harmonická funkce na U je tvaru $u(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Je-li $U \subset \mathbb{R}^1$ libovolná otevřená množina, potom lze U právě jedním způsobem vyjádřit jako sjednocení nejvýše spočetně mnoha po dvou disjunktních intervalů $U = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i)$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Funkce u je pak na každém intervalu (a_i, b_i) tvaru $u(x) = \alpha_i x + \beta_i$. Pro $n \geq 2$ se situace komplikuje. Je zřejmé, že lineární funkce

$$(7.3) \quad u(x_1, \dots, x_n) = \alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^n x_n + z$$

je řešením (7.1) na libovolném U . Nelze obecně dosáhnout toho, aby funkce (7.3) splňovaly předepsané okrajové podmínky na ∂U . Rovnice (7.1) je lineární. Proto má smysl „najít význačná řešení“ a ostatní z nich „sestavit“. Důležitou roli hraje zjištění, že rovnice (7.1) je invariantní vzhledem k rotaci. To je obsahem následujícího lemmatu. Uvažujme $U = \mathbb{R}^n$.

Lemma. Je-li $u \in C^2$ řešením (7.1) a je-li $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ ortogonální matice, potom funkce v definovaná jako

$$v(x) = u(Rx)$$

je řešením (7.1) také.

Důkaz.

$$v(x_1, \dots, x_n) = u\left(\sum_{j=1}^n r_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n r_{nj}x_j\right)$$

a tedy platí

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} r_{ik}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} r_{ik} r_{jk}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} r_{ik} r_{jk} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \sum_{k=1}^n r_{ik} r_{jk} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = \Delta u = 0. \end{aligned}$$

□

Proto budeme hledat řešení (7.1) na $U = \mathbb{R}^n$ ve tvaru $u(x) = v(r)$, kde $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Platí: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ pro $i = 1, \dots, n$, tj. pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right), \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = v''(r) + v'(r) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Dostáváme tak ODE

$$(7.4) \quad v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0,$$

kterou vyřešíme. Položme $v'(r) = z$. Pak

$$\begin{aligned} z' + \frac{n-1}{r}z &= 0, \quad \frac{z}{r} = w \\ w'r + w &= -(n-1)w, \quad \frac{w'}{w} = -\frac{n}{r} \\ \log|w| &= -\log r^n + \log k, \quad k > 0 \\ w &= \frac{k}{r^n}, \quad k \neq 0 \\ w = \frac{z}{r} &= \frac{k}{r^n}, \quad k \in \mathbb{R} \\ z &= \frac{k}{r^{n-1}} = v'(r) \end{aligned}$$

Jako řešení (7.4) tak máme $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ pro jisté a . To znamená, že pro $r > 0$ je

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & n = 2 \\ b \frac{1}{r^{n-2}} + c & n \geq 3 \end{cases}$$

Definice. Funkce $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$(7.5) \quad \Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

se nazývá *fundamentální (elementární) řešení* (7.1) na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zřejmě zobrazení $x \mapsto \Phi(x-y)$ je řešením (7.1) na $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ pro každé $y \in \mathbb{R}^n$. Také funkce $x \mapsto \Phi(x-y)f(y)$ je řešením rovnice (7.1). Konečně libovolná lineární kombinace tvaru $\sum_{i=1}^m \Phi(x-y_i)f(y_i)$ je řešením (7.1).

Věta. Necht $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Funkce

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)f(y) \, dy & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} \, dy & n \geq 3 \end{cases}$$

je třídy C^2 na $\mathbb{R}^n$ a platí

$$-\Delta u = f \quad \text{na } \mathbb{R}^n.$$

Definice. Objemovým průměrem se rozumí

$$\oint_{B(x,r)} f(y) \, dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} f(y) \, dy$$

a plošným průměrem poté

$$\oint_{\partial B(x,r)} f(y) \, dS = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y) \, dS.$$

Uvažujme opět $n = 1$, $U = (a, b)$, $B[x, r] = [x - r, x + r] \subseteq (a, b)$ a $u(x) = \alpha x + \beta$. Platí

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,r)} u(y) \, dy &= \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \alpha y + \beta \, dy = \frac{1}{2r} \left[\frac{\alpha y^2}{2} + \beta y \right]_{x-r}^{x+r} = \\ &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\alpha (x+r)^2}{2} - \frac{\alpha (x-r)^2}{2} + 2\beta r \right) = \frac{1}{2r} (2\alpha x r + 2\beta r) = \alpha x + \beta = u(x). \end{aligned}$$

Podobně $\oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS = u(x)$. Ukážeme si, že tohle platí pro obecné n .

Věta. *Nechť u je harmonická funkce na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom je*

$$u(x) = \oint_{B(x,r)} u(y) \, dy = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS$$

pro každou kouli $B[x, r] \subseteq U$.

Důkaz. Necht $B[x, r] \subseteq U$ pro jistá r a pro ně definujeme funkci

$$\varphi(r) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) = \oint_{\partial B(0,1)} u(x + rz) \, dS(z).$$

Derivováním dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \oint_{\partial B(0,1)} Du(x + rz) \cdot z \, dS(z) = \oint_{\partial B(x,r)} Du(y) \frac{y - x}{r} \, dS(y) = \\ &= \oint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \, dS(y) = \frac{r}{n} \oint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y) \, dy = 0 \end{aligned}$$

To ovšem znamená, že $\varphi(r)$ je konstantní pro $r > 0$. Tudíž je

$$\varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) = u(x).$$

Dokázali jsme, že $u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y)$. Dále platí

$$\int_{B(x,r)} u(y) \, dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y) \, dS(y) \right) ds = \int_0^r n\alpha(n) s^{n-1} u(x) \, ds = \alpha(n) u(x) r^n$$

tj.

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dy.$$

□

Věta. *Nechť $u \in C^2(U)$ splňuje na každé kouli $B[x, r] \subseteq U$ podmínku*

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y).$$

Potom je funkce u harmonická na U .

Důkaz. Předpokládejme sporem, že existuje $x \in U$ takové, že $\Delta u(x) \neq 0$. Protože $x \in U^0$, existuje $r > 0$ dostatečně malé, aby $B[x, r] \subseteq U$ a současně $\Delta u(y) \neq 0$, $y \in B[x, r]$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\Delta u(y) > 0 \forall y \in B[x, r]$. Pro funkci

$$\varphi(r) = \oint_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y)$$

z předchozího důkazu získáváme

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \oint_{\partial B(x, r)} \Delta u(y) \, dy > 0.$$

To je spor, neboť máme

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \oint_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y) = \varphi(0^+) < \varphi(s) = \oint_{\partial B(x, s)} u(y) \, dS(y) = u(x)$$

pro jisté s . □

Uvažme opět $n = 1$ a $U = (a, b)$. Každá harmonická funkce na U je tvaru $u(x) = \alpha x + \beta$. Necht $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Zřejmě u nabývá svých extrémů na hranici ∂U , tj.

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x), \quad \min_{x \in \overline{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x)$$

(tzv. *slabý princip maxima*. Navíc nabude-li u extrému na U , pak je konstantní (tzv. *silný princip maxima*). Princip maxima tvrdí, že předchozí platí také pro obecné harmonické funkce.

Věta. *Necht $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina a funkce $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ je harmonická na U . Pak platí*

- *Slabý princip maxima:*

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$$

- *Silný princip maxima: je-li navíc množina U souvislá, tak existence bodu $x_0 \in U$ splňujícího $u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$ zaručuje, že u je konstantní na U .*

Důkaz. Nejprve dokážeme silný princip maxima. Necht U je souvislá a necht příslušné $x_0 \in U$. Označme $M = u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$. Pro $r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial U))$ obdržíme, že

$$M = u(x_0) = \oint_{B(x_0, r)} u(y) \, dy \leq M.$$

Ze spojitosti u plyne, že $u \equiv M$ na $B(x_0, r)$, tj. x_0 je vnitřní bod množiny

$$A = \{x \in U \mid u(x) = M\}.$$

Množina A je otevřená v U , současně je uzavřená v U , protože U je souvislá, tak jediná obojetná množina v ní je $\emptyset$ a U , proto $A = U$. Tím jsme dokázali, že $u \equiv M$ na U .

Nyní dokážeme slabý princip maxima. Zvolme souvislou komponentu X množiny U na jejímž uzávěru nabývá u svého maxima. Znovu platí, že množina

$$B = \{x \in X \mid u(x) = \max_{y \in \overline{X}} u(y)\}$$

je $\emptyset$ nebo X .

$B = \emptyset$, pak maximum leží na $\partial X \subseteq \partial U$,

$B = X$, pak $u \equiv \max_{y \in \overline{X}} u(y)$ a tvrzení plyne z toho, že $u \in C(\overline{U})$. □

Poznámka. Pokud je U souvislá a $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ je řešení problému $\Delta u = 0$ na U , $u = g$ na ∂U , kde $g \geq 0$, potom je funkce u kladná na celém U , když je g kladná aspoň někde na ∂U .

Věta. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina, $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Pak existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{na } U, \\ u &= g & \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Důkaz. Nechť existují dvě různá řešení u_1, u_2 , pak funkce $w_1 \equiv u_1 - u_2$ a $w_2 \equiv u_2 - u_1$ jsou harmonické na U a nulové na ∂U . Dle principu maxima jsou tyto funkce w_1, w_2 nekladné na U . Odtud plyne, že $u_1 \equiv u_2$ na U . $\square$

Připomeňme, že pro $n = 2$ se harmonické funkce objevují jako reálné a imaginární části holomorfních funkcí.

Věta. *Nechť funkce $u \in C(U)$ splňuje podmínku*

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y)$$

pro každou uzavřenou kouli $B[x, r] \subseteq U$. Potom je $u \in C^\infty(U)$.

Důkaz. Buď $\epsilon > 0$, η_ϵ standardní regularizační funkce. Pro $x \in U_\epsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$ položíme $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$. Označme jako $\tilde{\eta}$ funkci η pro $n = 1$. Potom pro $x \in U_\epsilon$ dostáváme

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) &= \int_U \eta_\epsilon(x-y) u(y) \, dy = \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) \, dy = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) \, dy = \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) \right) dr = \frac{1}{\epsilon^n} u(x) n\alpha(n) \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) r^{n-1} dr = \\ &= u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(y) \, dy = u(x) \end{aligned}$$

Tedy $u = u^\epsilon$ na U_ϵ . Z konvoluce plyne, že $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$. Protože $\epsilon > 0$ bylo libovolné, je $u \in C^\infty(U)$. $\square$

Věta. *Nechť funkce u je harmonická na U . Potom pro každou uzavřenou kouli $B[x_0, r] \subset U$ a každý multiindex α délky k platí*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{c_k}{r^{n+k}} \int_{B(x_0,r)} |u(x)| \, dx,$$

kde $c_0 = \frac{1}{\alpha(n)}$ a $c_k = \frac{(2^{n+1} \cdot n \cdot k)^k}{\alpha(n)}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Uvažujme ohraničenou harmonickou funkci u na $\mathbb{R}^n$, tj. necht $|u(x)| \leq M$ pro jisté $M > 0$ a všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $r > 0$ a bod x_0 dostáváme

$$|Du(x_0)| \leq \frac{\text{konst}}{r^{n+1}} \cdot \int_{B(x_0,r)} |u(x)| \, dx \leq \frac{r^n}{r^{n+1}} \cdot \text{konst} \rightarrow 0 \quad \text{pro } r \rightarrow \infty.$$

Protože x_0 byl libovolný bod, je $Du \equiv 0$ a u je konstantní na $\mathbb{R}^n$.

Věta (Liouvilleova). *Nechť funkce u je harmonická a ohraničená na $\mathbb{R}^n$, potom je u konstantní.*

Věta (O reprezentaci řešení Poissonovy rovnice). *Nechť $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ a $n \geq 3$. Každé ohraničené řešení (7.2) na $\mathbb{R}^n$ je tvaru*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy + c, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

kde c je konstanta.

Důkaz. Pro $n \geq 3$ je Φ tvaru

$$x \mapsto \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad x \neq 0,$$

a tedy pro $|x| \rightarrow \infty$ máme $\Phi(x) \rightarrow 0$. Funkce

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$$

je tedy ohraničené řešení (7.2). Je-li $v(x)$ jiné ohraničené řešení úlohy (7.2), potom je funkce $w = u - v$ ohraničené řešení (7.1). Podle Liouvilleovy věty je funkce w konstantní. Tj. $v = u + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Poznámka. Pro $n = 2$ předchozí věta neplatí, protože fundamentální řešení není ohraničené pro $|x| \rightarrow \infty$, vždýť

$$\Phi: x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \log |x|.$$

Odhady derivací harmonické funkce dále umožňují dokázat

Věta. *Každá funkce, která je harmonická na U , je také analytická na U .*

Definice. Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná otevřená množina a V je otevřená množina splňující $V \subset \bar{V} \subset U$, $\bar{V}$ je kompaktní. Říkáme, že V je *kompaktně vnořená do U* a píšeme $V \subset\subset U$.

Protože $\bar{V}$ je kompaktní, je $\text{dist}(V, \partial U) = \inf\{\text{dist}(x, \partial U) \mid x \in \bar{V}\} > 0$. Z toho vyplývá, že lze každou harmonickou funkci u na U vyjádřit na $\bar{V}$ pomocí průměrů stejného poloměru. Pokud je funkce u kladná, znamená to, že u nemůže být v jistém bodě $\bar{V}$ „příliš velká“, pokud není „velká“ v každém bodě množiny V . Říkáme, že kladná harmonická funkce je *souměřitelná*. To je obsahem následující věty.

Věta (Harnackova nerovnost). *Nechť V je souvislá množina v $\mathbb{R}^n$ taková, že $V \subset\subset U$. Pak existuje konstanta $c > 0$ závisající pouze na V s vlastností, že pro každou kladnou harmonickou funkci u na U platí*

$$\sup_{x \in V} u(x) \leq c \cdot \inf_{x \in V} u(x), \text{ tj. } \frac{1}{c} u(y) \leq u(x) \leq cu(y) \quad x, y \in V.$$

Důkaz. Položme $r = \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial U)$. Je-li $x, y \in V$, $|x - y| \leq r$, pak

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\alpha(n) \cdot (2r)^n} \int_{B(x, 2r)} u(\xi) \, d\xi \geq \frac{1}{\alpha(n) (2r)^n} \int_{B(y, r)} u(\xi) \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(y, r)} u(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2^n} u(y) \end{aligned}$$

tj. $2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y)$. Protože $\bar{V}$ je souvislá kompaktní množina, lze ji pokrýt uzavřenými koulemi $B_1, \dots, B_N$ o poloměru $\frac{r}{2}$ takovými, že $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $i \in \{1, \dots, N-1\}$. To znamená, že pro všechna $x, y \in V$ platí

$$(2^n)^N u(y) \geq u(x) \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^N u(y).$$

□

Hledejme dále řešení rovnic (7.1), (7.2) splňující Dirichletovu okrajovou podmínku. Předpokládejme, že U je otevřená a ohraničená a ∂U je třídy C^1 . Naším cílem je získat formuli řešení úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{na } U, \\ u &= g & \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Nechť u je libovolná funkce z $C^2(\bar{U})$ a zvolíme libovolně $x \in U$. Necht $\epsilon > 0$ je tak malé, že $B[x, \epsilon] \subset U$. Označme

$$V_\epsilon = U \setminus B[x, \epsilon].$$

Opět $\vec{n}$ značí jednotkový vektor vnější normály k ∂V_ϵ . Třetí Greenova identita dává

$$\int_{V_\epsilon} u(y) \Delta_{(y)} \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy = \int_{\partial V_\epsilon} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \, dS(y).$$

Z vlastností fundamentálního řešení Φ plyne, že

$$\int_{V_\epsilon} u(y) \Delta_{(y)} \Phi(y-x) \, dy = 0.$$

Snadno můžeme spočítat, že

$$D\Phi(y-x) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{y-x}{|y-x|^n}, \quad y \neq x.$$

Pro $y \in \partial B(x, \epsilon)$ je $\vec{n} = -\frac{y-x}{\epsilon}$. Protože $\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot D\Phi$, dostáváme pro $y \in \partial B(x, \epsilon)$ rovnost $\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(y-x) = \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}$, a tedy

$$\int_{\partial B(x, \epsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(y-x) \, dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x, \epsilon)} u(y) \, dS(y) \rightarrow u(x) \quad \text{pro } \epsilon \rightarrow 0.$$

Současně dostáváme následující odhady

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(x, \epsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \, dS(y) \right| &\leq \max_{x \in \partial B(0, \epsilon)} |\Phi(x)| \int_{\partial B(x, \epsilon)} |Du(y)| \, dS(y) \leq \\ &= \text{konst} \cdot \max_{x \in \partial B(0, \epsilon)} |\Phi(x)| \int_{\partial B(0, \epsilon)} dS(y) = \text{konst} \cdot \max_{x \in \partial B(0, \epsilon)} |\Phi(x)| \epsilon^{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{pro } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pro $\epsilon \rightarrow 0$ získáváme

$$(7.6) \quad u(x) = \int_{\partial U} \left[\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(y-x) \right] dS(y) - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy$$

pro všechna $x \in U$ a každou funkci $u \in C^2(\overline{U})$. Nyní máme úlohu vyřešenu pro kombinaci Dirichletovy a Neumannovy podmínky. Abychom nemuseli uvažovat výraz $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, zavedeme tzv. *korekční funkci* $\varphi^\times = \varphi^\times(y)$ pro $x \in U$, která je řešením problému

$$\begin{aligned} \Delta \varphi^\times &= 0 & \text{na } U, \\ \varphi^\times &= \Phi(y-x) & \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Dvojnásobné užití Greenovy věty vede na

$$\begin{aligned} (7.7) \quad & - \int_U \varphi^\times(y) \Delta u(y) dy = \int_U D\varphi^\times(y) Du(y) dy - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \varphi^\times(y) dS(y) = \\ & = - \int_U \Delta \varphi^\times(y) u(y) dy + \int_{\partial U} \frac{\partial \varphi^\times}{\partial \vec{n}}(y) u(y) dS(y) - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \varphi^\times(y) dS(y) = \\ & = \int_{\partial U} \left[u(y) \frac{\partial \varphi^\times}{\partial \vec{n}}(y) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right] dS(y). \end{aligned}$$

Definice. Greenovou funkcí pro množinu U rozumíme funkci

$$G(x, y) = \Phi(y-x) - \varphi^\times(y),$$

kde $x \in U$, $y \in \overline{U}$, $x \neq y$.

Vztahy (7.6) a (7.7) dávají (součet)

$$(7.8) \quad u(x) = - \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x, y) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dy, \quad x \in U,$$

kde se již $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ nevyskytuje. Je-li tak funkce $u \in C^2(\overline{U})$ řešením Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici, lze hodnoty Δu na U a u na ∂U v (7.8) nahradit funkcemi f, g . Tím jsme dokázali následující větu.

Věta (Greenova). *Nechť funkce $u \in C^2(\overline{U})$ je řešením*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{na } U, \\ u &= g & \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Pak platí

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x, y) dS(y) + \int_U G(x, y) f(y) dy, \quad \forall x \in U.$$

Konstrukce Greenovy funkce pro danou množinu U je „netriviální“. Důležitý případ vzniká pro množinu $U = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Tato množina není ohraničená. Je nutné přímým výpočtem ověřit, že získaná formule opravdu dává řešení zadaného problému. Začneme u Φ a odstraníme jeho singularitu pomocí tzv. reflexe přes hranici $\partial \mathbb{R}_+^n = \{x_n = 0\}$. *Reflexí bodu* $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ rozumíme bod $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. Položíme-li

$$\varphi^\times(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \overline{\mathbb{R}_+^n}, x \neq y,$$

vidíme, že funkce $\varphi^\times$ nemá na $\mathbb{R}_+^n$ singularity a že

$$\Delta\varphi^\times(y) = \Delta_{(y)}\Phi(y - \tilde{x}) = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}_+^n.$$

Navíc pro $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$ je

$$\varphi^\times(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y - x),$$

což znamená, že $\varphi^\times(x)$ je korekční funkce, a tedy Greenova funkce je

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}) \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \overline{\mathbb{R}_+^n}, x \neq y.$$

Odtud pro $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$ plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x, y) &= DG(x, y) \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) \cdot n^i(y) = \left[\frac{\partial \Phi(y - x)}{\partial y_n} - \frac{\partial \Phi(y - \tilde{x})}{\partial y_n} \right] (-1) = \\ &= - \left[-\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} + \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_n + x_n}{|y - x|^n} \right] = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}. \end{aligned}$$

Je-li tak funkce $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ řešením úlohy

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}_+^n, \\ u &= g & \text{na } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{aligned}$$

potom lze předpokládat, že u lze vyjádřit jako

$$(7.10) \quad u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y) \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Tento vztah (7.10) se nazývá *Poissonova formule* pro poloprostor a funkce

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n$$

se nazývá *Poissonový jádrem*. To, zda funkce u z (7.10) je řešením (7.9) je nutné ověřit.

Věta (Poissonova formule pro poloprostor). *Nechť $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ a u je definována v (7.10). Pak*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$
2. $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}_+^n$
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}_+^n}} u(x) = g(x_0), x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$

Poznámka. Další důležitou množinou je $U = B(0, 1)$. Také nyní se dá využít reflexe, kdy libovolnému bodu $x \in B[0, 1] \setminus \{0\}$ je přiřazen duální bod $\tilde{x}$ pomocí zobrazení $x \mapsto \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$. Lze ukázat, že

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$$

a že Poissonova formule pak je

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y),$$

přičemž za vhodných předpokladů ($g \in C^1$) jde o řešení okrajového problému

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \text{na } B(0,1), \\ u &= g & \text{na } \partial B(0,1).\end{aligned}$$

Na závěr ještě jednou uvažujme otevřenou a ohraničenou množinu U s hranicí třídy C^1 a okrajový problém

$$(7.11) \quad \begin{aligned}-\Delta u &= f & \text{na } U, \\ u &= g & \text{na } \partial U\end{aligned}$$

spolu s jeho tzv. energetickým funkciónálem

$$I[w] = \int_U \left(\frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \right),$$

kde funkce w přísluší přípustné množině

$$Y = \{w \in C^2(\overline{U}) \mid w = g \text{ na } \partial U\}.$$

Věta (Dirichletův princip). *Je-li $u \in C^2(\overline{U})$ řešením (7.11), potom je*

$$(7.12) \quad I[u] = \inf_{w \in Y} I[w].$$

Jestliže $u \in Y$ splňuje (7.12), potom je u řešením (7.11).

8 Rovnice vedení tepla

je tvaru

$$(8.1) \quad u_t - \Delta u = 0,$$

respektive nehomogenní rovnice vedení tepla je tvaru

$$(8.2) \quad u_t - \Delta u = f,$$

přičemž $t > 0$, $x \in U$ pro otevřenou množinu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $u: \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je neznámá funkce a Laplaceův operátor se uvažuje pouze vzhledem k $x = (x_1, \dots, x_n)$, tedy $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$, $f: U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je známá funkce (často se uvažuje $f \in C(U \times [0, \infty))$).

Je-li funkce $u = u(x, t)$ řešením rovnice (8.1), pak pro libovolné pevné λ je také funkce $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ řešením (8.1). Uvažujme proto

$$(8.3) \quad u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

kdy kromě funkce $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třeba určit také hodnoty konstant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dosazením (8.3) do (8.1) s použitím

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x_1}{t^\beta}, \dots, \frac{x_n}{t^\beta}\right), \\ u_t(x, t) &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{\beta}{t^{\alpha+\beta+1}} x Dv\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \\ u_{x_i}(x, t) &= \frac{1}{t^{\alpha+\beta}} v_{x_i}\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad i = 1, \dots, n, \\ u_{x_i x_i}(x, t) &= \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} v_{x_i x_i}\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad i = 1, \dots, n, \\ \Delta u(x, t) &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \end{aligned}$$

získáváme

$$\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \beta t^{-(\alpha+1)} \frac{x}{t^\beta} Dv\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0.$$

Položme $y = \frac{x}{t^\beta}$ a následně $\beta = \frac{1}{2}$, tím obdržíme

$$(8.4) \quad \alpha v(y) + \frac{1}{2} y Dv(y) + \Delta v(y) = 0.$$

Hledejme radiálně symetrická řešení vzhledem k prostorovým proměnným, tj. předpokládejme, že $v(y) = w(|y|)$ pro $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Potom (8.4) přejde do tvaru

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

kde $r = |y| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$, $r \neq 0$, $' = \frac{\partial}{\partial r}$. Výše stačí uvážit, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(y)}{\partial y_i} &= w'(r) \frac{y_i}{r} \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{2} y Dv(y) &= \frac{1}{2} w'(r) \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2}{r} = \frac{1}{2} w'(r) \cdot r, \\ \Delta v(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(w'(r) \frac{y_i}{r} \right) = \sum_{i=1}^n \left(w''(r) \left(\frac{y_i}{r} \right)^2 + w'(r) \frac{1}{r} - w'(r) \frac{1}{r} \frac{y_i^2}{r^2} \right) = \\ &= w''(r) + n \frac{w'(r)}{r} - \frac{w'(r)}{r}\end{aligned}$$

Zvolme $\alpha = \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{n}{2} w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' &= 0 \\ \frac{n}{2} r^{n-1} w + \frac{1}{2} r^n w' + r^{n-1} w'' + (n-1) r^{n-2} w' &= 0 \\ (r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' &= 0\end{aligned}$$

a tudíž

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a$$

pro jisté $a \in \mathbb{R}$. Volme $a = 0$, což vede na

$$w' = -\frac{1}{2} r w.$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$w(r) = b \cdot e^{-\frac{r^2}{4}}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Celkem dostáváme

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = t^{-\frac{n}{2}} v\left(x t^{-\frac{1}{2}}\right) = t^{-\frac{n}{2}} w\left(|x| t^{-\frac{1}{2}}\right) = b t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Lze ověřit, že tato funkce je řešením rovnice (8.1) pro každé $b \in \mathbb{R}$.

Definice. Funkce $\Phi: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0, (x, t) \neq (0, 0) \end{cases}$$

se nazývá *fundamentální řešení* rovnice vedení tepla (též *Greenova funkce*, *Gaussovo-Weierstrassovo jádro*).

Poznámka. • Často se zapisuje $\Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)$.

• Pro každé $t > 0$ je $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$, neboť

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 1.$$

Nyní uvažujme situaci, kdy prostorová proměnná je z $\mathbb{R}^n$. Úlohy, kde jako podmínka vystupuje to, že řešení nabývá v čase $t = 0$ předepsané hodnoty $g(x)$ pro $x \in \mathbb{R}^n$, se nazývá *počáteční*.

Uvažujme tedy homogenní počáteční problém

$$(8.5) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Řešením rovnice vedení tepla je Φ až na singularitu v počátku $(0, 0)$. Z tvaru Φ je vidět, že pro libovolné pevné $y \in \mathbb{R}^n$ je také výraz $\Phi(x - y, t)$ řešením až na singularitu v $(y, 0)$.

Věta. *Nechť $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a funkce u je definována jako*

$$(8.6) \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) \, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \, dy$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Pak platí

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
2. $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = g(x_0)$ pro $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Důkaz. 1. Plyne z toho, že $y(x, t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ je na $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ třídy C^∞ pro každé $\delta > 0$. Všechny derivace jsou integrovatelné na $\mathbb{R}^n$.

2. Vzhledem k 1 je

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x - y, t) g(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{(x)} \Phi(x - y, t) g(y) \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta_{(x)} \Phi) g \, dy = 0 \end{aligned}$$

3. Zvolme libovolně (ale pevně) $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$. Neboť $g \in C(\mathbb{R}^n)$, existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}^n: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Odhadujeme

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi g \, dy - g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \, dy \right| \leq \\ &\leq \underbrace{\int_{B(x_0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| \, dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| \, dy}_{I_2} \end{aligned}$$

Platí $I_1 \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi = \epsilon$. Protože $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, je

$$I_2 \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} \Phi \, dy \leq C \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, dy = I_3$$

pro jisté $C \in \mathbb{R}$. Pro $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)$, $x \in \mathbb{R}^n$ t.ž. $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ je $|x - y| \geq \frac{1}{2}|y - x_0| \geq \frac{\delta}{2}$.

$$I_3 \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\frac{\delta}{2}}^\infty \left(\int_{\partial B(0, r)} e^{-\frac{r^2}{4t}} \, dS(y) \right) \, dr \leq \frac{D}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\frac{\delta}{2}}^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} \, dr$$

pro jisté $D > 0$. Ovšem

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr = 0$$

tj. pro $x \in \mathbb{R}^n$ splňující $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ a $t > 0$ dostatečně malé je $|u(x, t) - g(x_0)| < 2\epsilon$. $\square$

Poznámka. Je-li funkce g ohraničená, spojitá, nezáporná a $g \not\equiv 0$, pak funkce u definovaná v (8.6) je kladná $\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$.

Uvažujme nehomogenní problém

$$(8.7) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Zobrazení

$$(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$$

je řešení rovnice (8.1) pro $y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t$. Volme s pevně. Pak je pro jistá f funkce

$$u(x, t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

řešení jednoparametrického systému

$$(8.8) \quad \begin{aligned} u_t(-, s) - \Delta u(-, s) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(-, s) &= f(-, s) && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{aligned}$$

To je počáteční problém, kdy $t = 0$ je nahrazeno obecným okamžikem $t = s$. V ODE je známa metoda variace konstant umožňující pomocí obecného řešení homogenní maticové rovnice $x' = A(t)x$ získat řešení rovnice $y' = A(t)y + b(t)$. Tato metoda je speciálním případem tzv. *Duhamelova principu*.

Duhamelův princip tvrdí, že řešení $u(-)$ problému (8.7) lze získat integrací řešení $u(-, s)$ problému (8.8) přes s .

Věta. *Nechť $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, kde $C^{2,1}(\bar{U}) = \{f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} \mid f, D_x f, D_x^2 f, f_t \in C(\bar{U})\}$ je funkce s kompaktním nosičem, tj. $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Definujme*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t u(x, t, s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds = \int_0^t \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. Pak platí

1. $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
2. $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t)$ pro $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = 0$ pro $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Kombinace výše uvedených dvou vět nám dává řešení problému

$$(8.9) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= f & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Řešení (8.9) získáváme ve tvaru

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds.$$

Nyní se budeme zabývat situacemi, kdy je obor, na kterém uvažujeme řešení, omezen. Mluví se o *počáteční a okrajové úloze*.

Definice. Necht $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina a necht $T > 0$. *Parabolickým válcem* označujeme množinu

$$U_T = U \times (0, T]$$

a dále klademe

$$\Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T.$$

Při zkoumání Laplaceovy rovnice jsme zjistili, že harmonické funkce splňují podmínky povrchového a objemového průměru. Pokud se pokusíme o to stejné v případě řešení rovnice vedení tepla, zjistíme, že formule, ve kterých by se integrovalo přes sféru či kouli, neplatí.

Definice. Pro pevné $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ položíme

$$E(x, t, r) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, t) \mid \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}.$$

Věta. Necht $u \in C^{2,1}(U_T)$ je řešením rovnice (8.1). Pak platí

$$(8.10) \quad u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t, r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{|t - s|^2} dy ds$$

pro libovolné $E(x, t, r) \subseteq U_T$.

Poznámka. Všimněme si, že pravá strana (8.10) vyžaduje znát hodnoty $u(y, s)$ pouze pro $s < t$.

Příklad. Řešme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Fourierova transformace aplikovaná vzhledem k prostorovým proměnným vede na

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |y|^2 \hat{u} &= 0 & \text{pro } t > 0, \\ \hat{u} &= \hat{g} & \text{pro } t = 0. \end{aligned}$$

To lze pro každé pevné y řešit se ziskem

$$\hat{u}(y, t) = e^{-|y|^2 t} \hat{g}(y)$$

platí tak

$$u = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} g * F,$$

kde $\hat{F}(y) = e^{-t|y|^2}$. Tedy

$$F(x) = \left(e^{-t|y|^2} \right)^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2} dy = \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

To již dává

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Věta. Nechť funkce $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ je řešením rovnice (8.1) na U_T .

1. Platí

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$$

2. Je-li navíc množina U souvislá a existuje-li bod $(x_0, t_0) \in U_T$ takový, že

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u,$$

pak je u konstantní na $\overline{U_{t_0}}$.

Poznámka. • První část věty se nazývá *princip maxima* a druhá část *silný princip maxima*

- Analogické tvrzení platí, pokud se maximum nahradí za minimum na všech místech.
- Pokud řešení u nabude svého maxima (či minima) v nějakém vnitřním bodě (x_0, t_0) , potom bude funkce u konstantní ve všech bodech (x, t) souvislé komponenty obsahující bod (x_0, t_0) , kde $t \leq t_0$. To je v souladu s fyzikální interpretací.

Důkaz. Uvažujme část 2. Nechť existuje $(x_0, t_0) \in U_T$ takové, že

$$M = u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u.$$

Protože $U_T = U \times (0, T]$, kde U je otevřená, tak pro všechna dostatečně malá $r > 0$ bude $E(x_0, t_0, r) \subseteq U_T$. Podle vlastnosti průměru tak bude platit

$$M = u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0, r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \leq M \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0, r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds = M$$

Kdyby existoval bod $(y, s) \in E(x_0, t_0, r)$ takový, že $u(y, s) < M$, tak by vzhledem ke spojitosti u platilo $M = u(x_0, t_0) < M$, což není možné. Musí tedy být $u \equiv M$ na celém $E(x_0, t_0, r)$.

Označme jako $V \subseteq U$ množinu všech bodů $x \in U$ pro které existuje $\{x_0, \dots, x_m = x\} \subseteq U$ posloupnost taková, že úsečka spojující body $x_{i-1}x_i$ leží celá v U pro $i \in \{1, \dots, m\}$. Zřejmě je V neprázdná. Necht' je $\{y_k\}_{k=0}^\infty \subset V$ s vlastností, že $y_k \rightarrow y \in U$ pro $k \rightarrow \infty$. Neboť je U otevřená, existuje $s > 0$ tak malé, že $B(y, s) \subseteq U$. Zvláště úsečka spojující body $y, y_{\bar{k}}$ pro dost velké $\bar{k}$ leží v U . Množina V je uzavřená v U , zřejmě je také otevřená v U . Souvislost U tak dává $U = V$.

Zvolme libovolně bod (x, t) , kde $x \in U, 0 < t \leq t_0$. Vzhledem k výše dokázanému, existuje konečná posloupnost bodů $\{x_0, \dots, x_m = x\} \subset U$ taková, že všechny úsečky v $\mathbb{R}^n$ spojující body $x_{i-1}x_i$ leží v U pro $i = 1, \dots, m$. Zvolme časy $t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_m = t$. Potom úsečky $L_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ spojující body $(x_{i-1}, t_{i-1}), (x_i, t_i)$ leží v U_{t_0} pro $i \in \{1, \dots, m\}$. Položme

$$\tau_1 = \inf\{s \geq t_1 \mid u(x, t) = M \ \forall (x, t) \in L_1, \ s \leq t \leq t_0\}.$$

Protože funkce u je spojitá, nabývá na L_1 svého minima. Předpokládejme, že $\tau_1 > t_1$, pak $u(\xi_1, \tau_1) = M$, kde $(\xi_1, \tau_1) \in L_1$. To podle výše uvedeného znamená, že $u = M$ na $E(\xi_1, \tau_1, r)$ pro všechna dostatečně malá $r > 0$. Ovšem $E(\xi_1, \tau_1, r)$ obsahuje body $(\bar{x}, \bar{t}) \in L_1$, kdy $\bar{t} < \tau_1$. To je spor. Nutně tedy $\tau_1 = t_1$ a $u \equiv M$ na L_1 .

Opakováním této úvahy pro konečně mnoho úseček L_i zjistíme, že $u(x, t) = M$. Bod (x, t) byl libovolný, u spojitě na $\overline{U_T}$. Celkem je tedy $u \equiv M$ na $\overline{U_{t_0}}$.

První část plyne z dokázané druhé části. Stačí uvážit souvislou komponentu množiny U . □

Věta. *Existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ počáteční okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f & \text{na } U_T, \\ u &= g & \text{na } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Důkaz. Sporem. Necht' u_1, u_2 jsou dvě různá řešení uvažované úlohy. Potom funkce $u_{12} = u_1 - u_2$ a $u_{21} = u_2 - u_1$ jsou řešeními úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } U_T, \\ u &= 0 & \text{na } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Podle principu maxima je $u_{12} \leq 0, u_{21} \leq 0$ na $\overline{U_T}$, což znamená, že $u_1 = u_2$. □

Věta. *Necht' U je souvislá ohraničená a otevřená množina a funkce $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ je řešením úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } U_T, \\ u &= 0 & \text{na } \partial U \times [0, T], \\ u &= g & \text{na } U \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde funkce g je nezáporná. Je-li funkce g kladná někde na U , pak je u kladná na U_T .

Poznámka. Předchozí věta se v literatuře označuje jako *šíření tepla nekonečnou rychlostí*. Už umíme dokázat jednoznačnost řešení počáteční-okrajové úlohy na omezené množině. Nyní ji chceme dokázat pro $U = \mathbb{R}^n$ tj. v případě počáteční úlohy. Protože je nyní zkoumaná množina neomezená, je třeba uvažovat další podmínky, které by omezovaly chování řešení.

Věta. Necht $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ je řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

a splňuje tzv. odhad růstu, tj. existují čísla $a, A > 0$ t.ž.

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a \cdot |x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T].$$

Potom je

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Věta. Existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ počáteční úlohy

$$(8.11) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= f & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

splňující nerovnost

$$(8.12) \quad |u(x, t)| \leq Ae^{a \cdot |x|^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$ a jisté konstanty $A, a > 0$.

Důkaz. Necht existují dvě různá řešení u_1, u_2 úlohy (8.11) splňující (8.12). Znovu uvažujme funkce $u_{12} = u_1 - u_2$ a $u_{21} = u_2 - u_1$. Tyto funkce jsou řešeními úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

a splňují (8.12) pro jisté konstanty. Podle principu maxima pro počáteční úlohu jsou funkce $u_1 - u_2$ a $u_2 - u_1$ nekladné na $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. Tedy $u_1 \equiv u_2$ na $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, což je spor. $\square$

Poznámka. • Lze dokázat, že úloha

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení a že právě s výjimkou nulového řešení všechna tato řešení rostou a klesají velice rychle.

- Jediné řešení, které se fyzikálně interpretuje je právě tol nulové. Podmínka „nejvýše exponenciálního růstu“ je tedy vynucena možnými i známými aplikacemi.
- Rovnice vedení tepla má mnoho charakteristických vlastností, které nelze uspokojivě vnímat v aplikacích. Základní vlastností rovnice vedení tepla je však její schopnost „vyhlazování poruch“. To je popsáno v následující větě.

Věta. Necht funkce $u \in C^{2,1}(U_T)$ je řešením (8.1), potom $u \in C^\infty(U_T)$.

Nadále budeme předpokládat, že U je otevřená, ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$, její hranice je třídy C^1 a že je pevně dán tzv. *terminální čas* $T > 0$.

Věta. *Počáteční okrajová úloha*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f & \text{na } U_T, \\ u &= g & \text{na } \Gamma_T \end{aligned}$$

má nejvýše jedno řešení $u \in C^{2,1}(\overline{U_T})$.

Důkaz. Necht u_1, u_2 jsou dvě řešení zadané úlohy, která jsou třídy $C^{2,1}(\overline{U_T})$. Funkce $w = u_1 - u_2$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= 0 & \text{na } U_T, \\ w &= 0 & \text{na } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Pro $t \in [0, T]$ definujme funkci

$$e(t) = \int_U w^2(x, t) \, dx.$$

Pro $t \in (0, T)$ je

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_U 2w(x, t) w_t(x, t) \, dx = 2 \int_U w(x, t) \Delta w(x, t) \, dx = \\ &= 2 \int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w \, dS - 2 \int_U Dw \cdot Dw \, dx = -2 \int_U |Dw|^2 \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Podle definice funkce e tak je $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$, $t \in (0, T]$. To ovšem dává $w \equiv 0$ na U_T , tj. $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Dále se věnujme tzv. *problému zpětné jednoznačnosti*, který je obsahem následující věty.

Věta. *Necht funkce* $u \in C^2(\overline{U_T})$ *je řešením úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f & \text{na } U_T, \\ u &= g & \text{na } \partial U \times [0, T]. \end{aligned}$$

Necht funkce $\tilde{u} \in C^2(\overline{U_T})$ *je řešením úlohy*

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} &= f & \text{na } U_T, \\ \tilde{u} &= g & \text{na } \partial U \times [0, T]. \end{aligned}$$

Jestliže $u(x, T) = \tilde{u}(x, T)$, $x \in U$, *potom* $u \equiv \tilde{u}$ *na* U_T .

Důkaz. Položme $w = u - \tilde{u}$ a definujme funkci $e: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$e(t) = \int_U w^2(x, t) \, dx.$$

Stejně jako v důkazu předchozí věty lze ukázat, že

$$e'(t) = -2 \int_U |Dw|^2 \, dx.$$

Dále pro $t \in (0, T)$ je

$$e''(t) = -4 \int_U Dw \cdot Dw_t \, dx = -4 \left(\int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w_t \, dS - \int_U \Delta w \cdot w_t \, dx \right) = 4 \int_U (\Delta w)^2 \, dx.$$

Proto pro $t \in (0, T)$ je

$$\begin{aligned} [e'(t)]^2 &= 4 \left(\int_U |Dw|^2 dx \right)^2 = 4 \left(\int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w dS - \int_U w \Delta w dx \right)^2 = 4 \left(\int_U w \Delta w dx \right)^2 \leq \\ &\leq \int_U w^2 dx \left(4 \int_U (\Delta w)^2 dx \right) = e(t) \cdot e''(t). \end{aligned}$$

Přičemž jsme použili Hölderovu (Cauchy-Schwarzovu) nerovnost

$$\left| \int_M f(x) g(x) dx \right| \leq \int_M |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_M f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

přičemž f, g jsou spojitě a integrovatelné na M . Zopakujme, že $[e'(t)]^2 \leq e(t) \cdot e''(t)$ pro $t \in (0, T)$. Kdyby bylo $e(t) = 0$ pro $t \in (0, T]$, pak by $w \equiv u - \tilde{u} \equiv 0$ a důkaz by tím byl hotov. Předpokládejme proto, že existuje subinterval $[t_1, t_2] \in (0, T]$ t.ž. $e(t) > 0$ na $[t_1, t_2]$ a $e(t_2) = 0$. Definujme funkci $F: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$F(t) = \log e(t).$$

Platí

$$\begin{aligned} F'(t) &= e'(t) \cdot \frac{1}{e(t)} & t \in (t_1, t_2), \\ F''(t) &= \frac{e''(t)e(t) - (e'(t))^2}{e^2(t)} \geq 0 & t \in (t_1, t_2). \end{aligned}$$

To znamená, že na intervalu (t_1, t_2) je F konvexní, a tudíž je

$$F((1-\tau)t_1 + \tau t_3) \leq (1-\tau)F(t_1) + \tau F(t_3) \quad \tau \in (0, 1), \quad t_3 \in (t_1, t_2).$$

Dále získáváme

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t_3) \leq [e(t_1)]^{1-\tau} \cdot [e(t_3)]^\tau, \quad \tau \in (0, 1), \quad t_3 \in (t_1, t_2).$$

Využitím spojitosti funkce e (stejněměrné spojitosti w na kompaktní množině) máme

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq [e(t_1)]^{1-\tau} \cdot [e(t_2)]^\tau, \quad \tau \in (0, 1).$$

To je ale spor

$$0 < e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq [e(t_1)]^{1-\tau} \cdot 0 = 0 \quad \tau \in (0, 1).$$

Tedy $e(t) = 0$ pro $t \in [t_1, t_2]$. Důkaz je tímto hotov. □

9 Vlnová rovnice

Budeme analyzovat vlnovou rovnici

$$(9.1) \quad u_{tt} - \Delta u = 0$$

a příslušnou nehomogenní rovnici

$$(9.2) \quad u_{tt} - \Delta u = f,$$

kde $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ pro otevřenou množinu U , $t > 0$, funkce $f: U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je známá (často se v literatuře uvádí $f: U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$). Cílem je stanovit neznámou funkci $u: \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, která vyhovuje jejím počátečním a okrajovým podmínkám.

Zdůrazněme, že $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Ze zjištění vlastností řešení Laplaceovy rovnice a rovnice vedení tepla se lze domnívat, že Laplaceův operátor Δ zajišťuje jisté vlastnosti řešení (především řešení Laplaceovy rovnice a rovnice vedení tepla jsou třídy C^∞). To není pravda.

Cesta, jak lze získat řešení n -dimenzionální vlnové rovnice, vede přes použití tzv. *D'Alembertova vzorce*, který řeší jednodimenzionální rovnice (9.1), (9.2), a metodou sférických průměrů, která umožňuje nalézt řešení pro $n > 1$. Uvažujme proto počáteční úlohu

$$(9.3) \quad \begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{na } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= g && \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \\ u_t &= h && \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde funkce g, h jsou známy. Cílem je vyjádřit u pomocí g a h .

Předpokládejme, že uvažované funkce jsou dostatečně hladké. Všimněme si, že vlnovou rovnici (9.3) lze zapsat v následujícím tvaru

$$(9.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{na } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Označíme-li

$$(9.5) \quad v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

můžeme (9.4) přepsat jako

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

což je však transportní rovnice z 2. kapitoly (kdy je $b = (1)$). Její řešení umíme stanovit jako

$$v(x, t) = a(x - t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

přičemž $a(x) = v(x, 0)$. Dosazením do (9.5) získáváme

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = a(x - t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

což je nehomogenní transportní rovnice pro $b = (-1)$, $f(x, t) = a(x - t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Její řešení také známe jako

$$(9.6) \quad u(x, t) = \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t)$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$, kde $b(x) = u(x, 0)$. Uvědomme si, že funkce a, b závisí na funkci u pouze v čase $t = 0$. Můžeme tak využít počátečních podmínek se ziskem

$$\begin{aligned} b(x) &= u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ a(x) &= v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Návratem k (9.6) máme

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y) dy + g(x+t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

To jest

$$(9.7) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Vzorec (9.7) se nazývá *D'Alembertova formule*. Tento vzorec jsme však odvodili za předpokladu, že u je dostatečně hladké řešení (9.3). Je proto nutné ověřit, že formule (9.7) udává řešení (9.3).

Věta. *Nechť $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ a funkce u je definována v (9.7). Potom*

1. $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$,
2. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$,
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = g(x_0)$,
 $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u_t(x, t) = h(x_0)$ pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}$.

Důkaz. 1. Lze dokázat triviálně

2. Postupně derivujeme

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{2} [g'(x+t) - g'(x-t)] + \frac{1}{2} [h(x+t) + h(x-t)] \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} [g''(x+t) + g''(x-t)] + \frac{1}{2} [h'(x+t) - h'(x-t)] \\ u_x(x, t) &= \frac{1}{2} [g'(x+t) + g'(x-t)] + \frac{1}{2} [h(x+t) - h(x-t)] \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2} [g''(x+t) + g''(x-t)] + \frac{1}{2} [h'(x+t) - h'(x-t)] \end{aligned}$$

3. Lze dokázat triviálně

□

Poznámka. Když uvážíme výpočty v předchozím důkazu, nabízí se pro libovolné funkce $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ položit

$$(9.8) \quad u(x, t) = F(x+t) + G(x-t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

kdy dostáváme

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= F'(x+t) - G'(x-t) & u_x(x, t) &= F'(x+t) + G'(x-t) \\ u_{tt}(x, t) &= F''(x+t) + G''(x-t) & u_{xx}(x, t) &= F''(x+t) + G''(x-t) \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. To znamená, že dokonce každá funkce ve tvaru (9.8) je řešením vlnové rovnice (9.1), když $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ a $n = 1$.

Poznámka. Z tvaru D'Alembertovy formule plyne, že při $g \in C^k(\mathbb{R})$, $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ pro $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je uvažované řešení $u \in C^k(\mathbb{R})$, ale není obecně třídy $C^{k+1}(\mathbb{R})$. To znamená, že nedochází k okamžitému vyhlazování vstupních dat.

Již umíme řešit počáteční úlohu pro jednodimenzionální vlnovou rovnici. Jednoduchá úvaha nám umožní řešit také počáteční-okrajovou úlohu pro tuto rovnici na polopřímce $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Uvažujme problém

$$(9.9) \quad \begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \text{na } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u_t &= h & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u &= 0 & \text{na } \{x = 0\} \times (0, \infty), \end{aligned}$$

kde $g, h \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dané funkce takové, že $g(0) = h(0) = 0$.

Úloha (9.9) lze řešit tak, že ji převedeme na úlohu (9.3) lichým rozšířením funkcí u, g, h na celé $\mathbb{R}$, tj. položíme

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= u(x, t) & x > 0, t \geq 0; & \quad \tilde{g}(x) = g(x) & x \geq 0; & \quad \tilde{h}(x) = h(x) & x \geq 0; \\ \tilde{u}(x, t) &= 0 & x = 0, t \geq 0; & \quad \tilde{g}(x) = -g(-x) & x < 0; & \quad \tilde{h}(x) = -h(-x) & x < 0; \\ \tilde{u}(x, t) &= -u(-x, t) & x < 0, t \geq 0; \end{aligned}$$

Po rozšíření úloha (9.9) přejde na

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) &= 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \tilde{u}(x, t) &= \tilde{g}(x), & \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \\ \tilde{u}_t(x, t) &= \tilde{h}(x) & \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Nyní formulce (9.7) dává řešení původní úlohy (9.9) ve tvaru

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy,$$

tj.

$$(9.10) \quad u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2} [g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

neboť pro $0 \leq x \leq t$ je

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy &= \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy + \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy = \int_{x-t}^0 -h(-y) dy + \int_0^{x+t} h(y) dy = \\ &= \int_{t-x}^0 h(y) dy + \int_0^{x+t} h(y) dy = \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy. \end{aligned}$$

Vzorec (9.10) se také někdy označuje jako *D'Alembertova formule*.

Nadále budeme předpokládat, že $n > 1$ a že $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, kde $m \geq 2$, je řešení počáteční úlohy

$$(9.11) \quad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= h & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

přičemž g je třídy alespoň C^{m+1} a h alespoň C^m .

Cílem bude odvodit explicitní formuli pro řešení u obsahující pouze funkce g a h . Odvození bude probíhat v několika krocích. Nejdříve si zavedeme místo funkcí u, g, h jejich průměry. Průměr z funkce u bude pak řešením *Eulerovy-Poissonovy-Darbouxovy* PDE, která se dá v případě lichosti n převést na jednodimenzionální rovnici. Tu řešíme použitím D'Alembertova vzorce, čímž získáme tzv. *Kirchhoffův vzorec*. Případ sudého n převedeme na vyřešený případ přidáním jedné proměnné a získáme tím tzv. *Poissonův vzorec*.

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $r > 0$ položíme

$$(9.12) \quad U(x, r, t) = \oint_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y),$$

$$(9.13) \quad \begin{aligned} G(x, r, t) &= \oint_{\partial B(x, r)} g(y) \, dS(y), \\ H(x, r, t) &= \oint_{\partial B(x, r)} h(y) \, dS(y). \end{aligned}$$

Lemma. *Nechť u je řešením problému (9.11). Pro libovolné (pevně zvolené) $x \in \mathbb{R}^n$ je $U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0, \infty))$ a platí*

$$(9.14) \quad \begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r &= 0 & \text{na } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ U &= G & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ U_t &= H & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Budeme zkoumat vlnovou rovnici pro liché $n > 1$. Případ obecného lichého n je technicky komplikovaný, a proto se soustředíme na $n = 3$.

Předpokládejme, že funkce $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ řeší (9.11). Označme

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= rU, \\ \tilde{G} &= rG, \\ \tilde{H} &= rH, \end{aligned}$$

kde funkce U, G, H jsou definovány v (9.12), (9.13). Ukážeme, že platí (pro každé pevné $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} &= 0 & \text{na } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} &= \tilde{G} & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U}_t &= \tilde{H} & \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} &= 0 & \text{na } \{r = 0\} \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Snadno získáváme

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left[U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right] = rU_{rr} + 2U_r = \frac{\partial}{\partial r} [rU_r + U] = \tilde{U}_{rr}$$

zbývající je zřejmé.

Z D'Alembertovy formule (9.10) pro $x \in \mathbb{R}^3$, $0 < r \leq t$ plyne

$$(9.15) \quad \tilde{U}(x, r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(x, r+t, 0) - \tilde{G}(x, t-r, 0)] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{r+t} \tilde{H}(x, y, 0) dy.$$

Z (9.12) víme, že

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(x, r, t) \quad x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0.$$

Proto z definice $\tilde{U}$ a (9.15) dostáváme

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \tilde{U}(x, r, t) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{\tilde{G}(x, r+t, 0) - \tilde{G}(x, t-r, 0)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{r+t} \tilde{H}(x, y, 0) dy \right] = \\ &= \tilde{G}_r(x, t, 0) + \tilde{H}(x, t, 0) \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

Proto z definice G a H v (9.13) plyne

$$(9.16) \quad u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \cdot \oint_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) + t \cdot \oint_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y)$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) &= \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(z) = \oint_{\partial B(0, 1)} Dg(x + tz) \cdot z dS(z) = \\ &= \oint_{\partial B(x, t)} Dg(y) \frac{y - x}{t} dS(y), \end{aligned}$$

což po dosazení do (9.16) dává

$$\begin{aligned} (9.17) \quad u(x, t) &= \oint_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) + t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) + t \cdot \oint_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y) = \\ &= \oint_{\partial B(x, t)} [t \cdot h(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)] dS(y) \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

Formule (9.17) se nazývá *Kirchhoffův vzorec* pro řešení počáteční úlohy (9.11) v $\mathbb{R}^3$. Pro obecné liché $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ lze dokázat, že dostatečně hladké řešení počáteční úlohy (9.11) musí splňovat formuli

$$(9.18) \quad u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!!} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \oint_{\partial B(x, t)} g dS \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \oint_{\partial B(x, t)} h dS \right) \right],$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, přičemž $(n-2)!! = (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$.

Věta. *Nechť $n \geq 3$ je liché, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ a $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ pro $m = \frac{n+1}{2}$. Potom funkce u definovaná v (9.18) má následující vlastnosti*

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
2. $u_{tt} - \Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = g(x_0)$,
 $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u_t(x, t) = h(x_0)$ pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. 1. Platí triviálně viz (9.18)

2. Omezíme se pouze na případ $n = 3$. Předpokládejme, že $g \equiv 0$. Pak je

$$u(x, t) = t \cdot \oint_{\partial B(x, t)} h(y) \, dS(y) = t \cdot H(x, t, 0).$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $H(x, t) = H(x, t, 0)$. Platí

$$(9.19) \quad u_t(x, t) = H(x, t) + t \cdot H_t(x, t)$$

$$u_{tt}(x, t) = 2 \cdot H_t(x, t) + t \cdot H_{tt}(x, t) = \frac{1}{t} \left[2tH_t + t^2 \frac{\partial}{\partial t} H_t \right] = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} [t^2 H_t]$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Z definice je

$$H_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial B(x, t)} h(y) \, dS(y) = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial B(0, 1)} h(x + tz) \, dS(z) =$$

$$= \oint_{\partial B(0, 1)} Dh(x + tz) \cdot z \, dS(z) = \oint_{\partial B(x, t)} Dh(y) \frac{y - x}{t} \, dS(y)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Odtud

$$H_t(x, t) = \frac{1}{3 \cdot \alpha(3) t^2} \int_{\partial B(x, t)} Dh(y) \cdot \vec{n}(y) \, dS(y) = \frac{1}{3 \cdot \alpha(3) t^2} \int_{\partial B(x, t)} \frac{\partial h(y)}{\partial \vec{n}} \, dS(y) =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \alpha(3) t^2} \int_{B(x, t)} \Delta h(y) \, dy,$$

což po dosazení do (9.19) dává

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3 \cdot \alpha(3)} \int_{B(x, t)} \Delta h(y) \, dy \right) = \frac{1}{3 \cdot \alpha(3) t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x, t)} \Delta h(y) \, dy =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \alpha(3) t} \int_{\partial B(x, t)} \Delta h(y) \, dS(y) = t \cdot \Delta \oint_{\partial B(x, t)} h(y) \, dS(y) = \Delta(t \cdot H(x, t)) = \Delta u(x, t)$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Je-li $g \equiv 0$, pak $u_{tt} - \Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$. Podobně lze postupovat pro $h \equiv 0$ a pomocí „srovnatelných“ úprav potvrdit, že máme řešení vlnové rovnice. Obecný případ vyplývá z linearitě rovnice.

3. Necht $x_0 \in \mathbb{R}^3$ je pevně dané, dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) &= \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} \int_{\partial B(x,t)} [t \cdot h(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)] dS(y) = \\ &= \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} \int_{\partial B(0,1)} [t \cdot h(x + zt) + g(x + zt) + t \cdot Dg(x + zt) \cdot z] dS(z) = \\ &= \int_{\partial B(0,1)} g(x_0) dS(z) = g(x_0). \end{aligned}$$

Jen o trochu komplikovaněji se dá obdržet druhá z limit.

□

Případ obecného sudého n je také technicky komplikovaný, a proto rozebereme pouze případ $n = 2$. Předpokládejme, že $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ řeší počáteční úlohy (9.11). V tomto případě však není známa transformace, která umožňovala Eulerovu-Poissonovu-Darbouxovu rovnici použití. Proto budeme dvoudimenzionální úlohu chápat jako úlohu trojdimenzionální, ve které se třetí z prostorových proměnných nevyskytuje.

Označme

$$(9.20) \quad \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

uvážením počáteční úlohy (9.11) zjistíme, že musí platit

$$(9.21) \quad \begin{aligned} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \bar{u} &= \bar{g} \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ \bar{u}_t &= \bar{h} \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

kde $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$, $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$ pro $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Označme ještě

$$(9.22) \quad \begin{aligned} x &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \bar{x} &= (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Kirchhoffův vzorec vyjadřuje řešení úlohy (9.21) ve tvaru (spolu s (9.20), (9.22))

$$(9.23) \quad u(x, t) = \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \cdot \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) \right) + t \cdot \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{h}(\bar{y}) dS(\bar{y}),$$

kde $B_3(\bar{x}, t)$ je koule v $\mathbb{R}^3$ se středem $\bar{x}$ a poloměrem t . Lze však přejít ke kouli $B_2(x, t) \subseteq \mathbb{R}^2$, neboť

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) &= \frac{1}{3 \cdot \alpha(3) t^{3-1}} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) = \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B_2(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy = \frac{t}{2} \int_{B_2(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy. \end{aligned}$$

Zcela stejně se upraví také druhý integrál (9.23). Celkem máme

$$(9.24) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \cdot \int_{B_2(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B_2(x, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy.$$

Protože

$$\begin{aligned} t^2 \int_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy &= \frac{1}{\pi} \int_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{t\sqrt{1-|z|^2}} t^2 dz = t \cdot \int_{B_2(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} dz, \end{aligned}$$

lze první výraz (9.24) upravit na

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \right) &= \int_{B_2(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} dz + t \cdot \int_{B_2(0,1)} \frac{Dg(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} \cdot z dz = \\ &= t \cdot \int_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy + t \cdot \int_{B_2(x,t)} \frac{Dg(y)(y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy \end{aligned}$$

Nyní již můžeme (9.24) vyjádřit jediným integrálem jako

$$(9.25) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B_2(x,t)} \frac{t \cdot g(y) + t^2 \cdot h(y) + t \cdot Dg(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy$$

$x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Vzorec (9.25) se označuje jako *Poissonův*. Pro obecné sudé $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ lze ukázat, že dostatečně hladké řešení počáteční úlohy (9.11) musí splňovat

$$(9.26) \quad u(x, t) = \frac{1}{n!!} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B(x,t)} \frac{h(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) \right].$$

Pro $n = 2$ tato formule samozřejmě souhlasí s (9.25) a také se označuje jako *Poissonův vzorec*. Podobně jako pro lichá $n > 1$ je třeba ověřit, že (9.26) zadává skutečně řešení úlohy (9.11). To je obsahem následující věty, kterou lze dokázat podobně jako v případě liché dimenze.

Věta. *Nechť n je sudé, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ a $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ pro $m = \frac{n+2}{2}$. Potom funkce u definovaná v (9.26) má následující vlastnosti*

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
2. $u_{tt} - \Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = g(x_0)$,
 $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u_t(x, t) = h(x_0)$ pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Poznámka. 1. Zatímco v případě lichého $n > 1$ stačí k výpočtu hodnoty $u(x, t)$ znát hodnoty g, h a jejich derivací pouze na sféře $\partial B(x, t)$, v případě sudého n potřebujeme znát hodnoty g, h a jejich derivací na celé kouli $B(x, t)$.

2. Protože pro $n > 1$ obsahuje formule řešení derivace počátečních dat, tak již v libovolně malém čase $t > 0$ nemusí být řešení počáteční úlohy (9.11) tak hladké jako funkce g .
3. Z poznámky 1 a tvaru získaných formulí plyne, že podobně jako pro $n = 1$ se počáteční poruchy šíří konečnou rychlostí.

4. Z (9.18) a (9.26) plyne, že je-li $n \geq 3$ liché, pak počáteční data g, h v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ ovlivní hodnoty řešení pouze na hranici kuželu

$$C = \{(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, |x - y| \leq t\}$$

tj. na $\{(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, |x - y| = t\}$. Pro $n \geq 2$ sudé jsou pak ovlivněny hodnoty řešení uvnitř celého kuželu C .

Přístupme k řešení počáteční úlohy pro nehomogenní vlnovou rovnici.

$$(9.27) \quad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

přičemž funkce $f: \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je známá (často se požaduje $f: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$).

Také nyní lze využít Duhamelův princip, který říká, že je-li $u = u(x, t, s)$ řešení jednoparametrické úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt}(_, s) - \Delta u(_, s) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(_, s) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}, \\ u_t(_, s) &= f(_, s) && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{aligned}$$

pro $s \geq 0$, potom funkce

$$(9.28) \quad u(x, t) = \int_0^t u(x, t, s) \, ds \quad x \in \mathbb{R}^n, \, t \geq 0$$

je řešením úlohy (9.27).

Označení: pro $a > 0$ symbol $[a]$ udává tzv. celou část čísla a , kdy pro $k \in \mathbb{N}$ je $[k] = k$.

Věta. *Nechť $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Pak pro funkci u definovanou v (9.28) platí*

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$
2. $u_{tt} - \Delta u = f$ na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = 0$,
 $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u_t(x, t) = 0$ pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. 1. Je-li n liché, pak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$, je-li n sudé, pak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+2}{2}$, to znamená, že tvrzení plyne z předchozích vět.

2. Platí

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_t(x, t, t) + \int_0^t u_{tt}(x, t, s) \, ds = \int_0^t u_{tt}(x, t, s) \, ds \\ u_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t, t) + \int_0^t u_{ttt}(x, t, s) \, ds = f(x, t) + \int_0^t u_{ttt}(x, t, s) \, ds \\ \Delta u(x, t) &= \int_0^t \Delta u(x, t, s) \, ds = \int_0^t u_{tt}(x, t, s) \, ds \\ u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0^+)} u(x,t) &= \int_0^0 u(x,t,s) \, ds = 0 \\ \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0^+)} u_t(x,t) &= \int_0^0 u_t(x,t,s) \, ds = 0 \text{ pro každé } x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

Vzhledem k linearitě vlnové rovnice lze řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= h & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

získat jako součet řešení úlohy (9.11) a řešení úlohy (9.27).

Příklad. Určeme řešení úlohy (9.27) pro $n = 1$. D'Alembertova formule dává

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy,$$

přičemž nyní je $g = 0$ a $h = f$. Proto

$$u(x,t,s) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s) \, dy$$

a dále

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s) \, dy \, ds \quad x \in \mathbb{R}, \, t > 0.$$

Podobně můžeme určit řešení úlohy (9.27) pro $n = 3$, kdy Kirchhoffův vzorec dává

$$u(x,t,s) = \oint_{\partial B(x,t-s)} (t-s) f(y,s) \, dS(y) = (t-s) \oint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s) \, dS(y).$$

Tudíž

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t (t-s) \oint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s) \, dS(y) \, ds = \\ &= \int_0^t \frac{t-s}{3 \cdot \alpha(3) (t-s)^2} \int_{\partial B(x,t-s)} f(y,s) \, dS(y) \, ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x,t-s)} \frac{f(y,s)}{t-s} \, dS(y) \, ds = \\ &= \left| \begin{matrix} r = t-s \\ dr = -ds \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4\pi} \int_t^0 \int_{\partial B(x,r)} \frac{f(y,t-r)}{r} \, dS(y) \, dr = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(y,t-|y-x|)}{|x-y|} \, dy \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

Znovu uvažujme energetickou metodu (tj. tzv. variační přístup).

Budeme předpokládat, že $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená a otevřená množina s hranicí ∂U třídy C^1 . Necht $T > 0$ je pevně zvolený terminální čas stejně jako u rovnice vedení tepla označme

$$\begin{aligned} U_T &= U \times (0, T], \\ \Gamma_T &= \overline{U_T} \setminus U_T. \end{aligned}$$

Uvažujme počáteční okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} (9.29) \quad u_{tt} - \Delta u &= f & \text{na } U_T, \\ u &= g & \text{na } \Gamma_T, \\ u_t &= h & \text{na } U \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Věta. Existuje nejvýše jedno řešení u počáteční okrajové úlohy (9.29), pro které $u \in C^2(\overline{U_T})$.

Důkaz. Necht funkce $u_1 \in C^2(\overline{U_T})$ je řešením úlohy (9.29). Kdyby existovalo jiné řešení $u_2 \in C^2(\overline{U_T})$, pak jejich rozdíl $w = u_1 - u_2$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 & \text{na } U_T, \\ w &= 0 & \text{na } \Gamma_T, \\ w_t &= 0 & \text{na } U \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Definujme pomocnou funkci

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_U w_t^2(x, t) + |Dw(x, t)|^2 dx, \quad t \in [0, T]$$

pro $t \in (0, T)$ platí

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_U w_t w_{tt} + Dw Dw_t dx = \int_U w_t w_{tt} - w_t \Delta w dx + \int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w_t dS = \\ &= \int_U w_t (w_{tt} - \Delta w) dx = 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $e(t) = e(0) = 0$ pro každé $t \in (0, T]$. Proto je $w_t \equiv 0$ a $Dw \equiv 0$ na U_T , což dává $w \equiv 0$ na U_T , tj. $u_1 \equiv u_2$ na U_T , respektive na $\overline{U_T}$. $\square$

Příklad. Řešme v $\mathbb{C}$ počáteční úlohu pro vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

Fourierova transformace prováděná vzhledem k prostorovým proměnným dává

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt} + |y|^2 \hat{u} &= 0 & t > 0, \\ \hat{u} &= \hat{g} & t = 0, \\ \hat{u}_t &= 0 & t = 0, \end{aligned}$$

což je počáteční úloha pro ODE druhého řádu s parametrem y . Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + |y|^2 = 0$$

odtud $\lambda_{1,2} = \pm i|y|$.

Zohledněním počátečních podmínek dostaneme řešení

$$\hat{u} = \frac{1}{2} \hat{g} (e^{it|y|} + e^{-it|y|}).$$

Odtud plyne

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\hat{g}(e^{it|y|} + e^{-it|y|})]^\vee = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) [e^{i(xy+t|y|)} + e^{i(xy-t|y|)}] dy$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

10 Sobolevovy prostory

Nechť U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Symbolem $C_c^\infty(U)$ budeme označovat množinu všech funkcí $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$, které mají derivace všech řádů na U a mají kompaktní nosič $\text{supp}(\varphi) \subset U$. Funkce $\varphi \in C_c^\infty(U)$ se nazývají *testovací*. Množina $C_c^\infty(U)$ je hustá v $L_{\text{loc}}^1(U)$.

Uvažujme funkci $u \in C^1(U)$. Pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in C_c^\infty(U)$ dává metoda per partes

$$\int_U u \cdot \varphi_{x_i} dx = \int_{\partial U} u \cdot \varphi \cdot n^i dS - \int_U u_{x_i} \varphi dx = - \int_U u_{x_i} \varphi dx$$

pro $i \in \{1, \dots, n\}$, kde jsme využili toho, že φ má kompaktní nosič v U .

Je-li $u \in C^k(U)$ a $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multiindex délky $|\alpha| = k$, pak k -násobné užití metody per partes dává

$$\int_U u \cdot D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \cdot \varphi dx.$$

Definice. Nechť $u, v \in L_{\text{loc}}^1(U)$ a α je libovolný multiindex. Řekneme, že funkce v je *slabou (parciální) derivací podle α funkce u* , píšeme $D^\alpha u = v$, jestliže

$$\int_U u \cdot D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \cdot \varphi dx$$

pro všechny testovací funkce $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Pro zdůraznění se někdy píše „ $D^\alpha u = v$ ve slabém smyslu“. Jestliže taková funkce v neexistuje, funkce u nemá *slabou derivaci* podle α .

Poznámka. • Pokud slabá derivace podle α existuje, pak je určena jednoznačně až na množinu Lebesgueovy míry nula.

- Nechť $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$ a $\int_U u \cdot \varphi dx = 0$ pro všechny testovací funkce $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Potom $u \equiv 0$ skoro všude na U .

Definice. Nechť k je nezáporné celé číslo a $1 \leq p \leq +\infty$. *Sobolevovým prostorem $W^{k,p}(U)$* nazýváme množinu všech lokálně integrovatelných funkcí $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že pro každý multiindex α délky $|\alpha| \leq k$ slabá derivace $D^\alpha u$ existuje a je prvkem prostoru $L^p(U)$.

Z této definice ihned plyne, že pro $k = 0$ je

$$W^{0,p}(U) = L^p(U).$$

Věta. Nechť $u, v \in W^{k,p}(U)$ a $|\alpha| \leq k$. Pak platí

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$
2. $D^\gamma (D^\beta u) = D^\beta (D^\gamma u) = D^{\beta+\gamma}$ pro všechny multiindexy β, γ takové, že $|\beta| + |\gamma| \leq k$
3. $\xi u + \zeta v \in W^{k,p}(U)$, $D^\alpha (\xi u + \zeta v) = \xi D^\alpha u + \zeta D^\alpha v$ pro všechny konstanty $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$
4. $u \in W^{k,p}(V)$, je-li V otevřená podmnožina U
5. $\varphi \cdot u \in W^{k,p}(U)$, $D^\alpha (\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi \cdot D^{\alpha-\beta} u$ pro libovolné $\varphi \in C_c^\infty(U)$, kde $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

Je přirozené ztotožňovat funkce, které se shodují skoro všude. Tedy prvek $u \in W^{k,p}$ je třída funkcí nerozlišitelných z hlediska teorie Lebesgueovy míry. Tento přístup nám umožňuje zavést na $W^{k,p}$ následující normu

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u| = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)} & p = \infty. \end{cases}$$

V případě, kdy $p = 2$, je prostor $W^{k,2}$ dokonce Hilbertův. Proto se zavádí zkrácené označení

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Definice. Necht $u, u_1, u_2, \dots$ jsou prvky Sobolevova prostoru $W^{k,p}(U)$.

1. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ *konverguje* k funkci u v prostoru $W^{k,p}(U)$, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$.
2. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ *konverguje* k funkci u v prostoru $W^{k,p}(U)$ *lokálně*, píšeme $u_m \rightarrow u$ ve $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$, jestliže $u_m \rightarrow u$ ve $W^{k,p}(V)$ pro libovolnou množinu $V \subset\subset U$.

Je-li $n = 1$ a $U = (a, b)$, potom $u \in W^{1,p} \Leftrightarrow u$ je skoro všude rovno absolutně spojitě funkci, jejíž derivace náleží do $L^p(a, b)$. Pro $n > 1$ taková charakterizace není možná. Zvláště prvky Sobolevových prostorů nemusí být spojitě či ohraničené.

Věta. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p \leq \infty$ je Sobolevův prostor $W^{k,p}(U)$ s normou $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$ Banachův prostor.

Věta. Necht $u \in W^{k,p}(U)$ a necht $1 \leq p < \infty$ a $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$ na U_ϵ . Pak platí

1. $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$ pro každé $\epsilon > 0$,
2. $u^\epsilon \rightarrow u$ ve $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$ pro $\epsilon \rightarrow 0$.

Věta. Necht U je navíc ohraničená a $u \in W^{k,p}(U)$ pro $1 \leq p < \infty$. Pak existují funkce $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ takové, že $u_m \rightarrow u$ ve $W^{k,p}(U)$.

Věta. Necht U je navíc ohraničená s hranicí ∂U třídy C^1 . Necht $u \in W^{k,p}(U)$ pro $1 \leq p < \infty$. Potom existují funkce $u_m \in C^\infty(\overline{U})$ takové, že $u_m \rightarrow u$ ve $W^{k,p}(U)$.

Sobolevovy prostory vznikly v teorii PDE jako prostředek, který umožňuje pracovat s řešeními, která nejsou dostatečně hladká. Řešení však musejí splňovat jisté podmínky podél hranice ∂U . To je problém. Funkce ze Sobolevova prostoru je definována pouze skoro všude na $\overline{U}$. Proto není jasné, jaký smysl má zúžení $u \in W^{k,p}(U)$ na hranici ∂U . K vyřešení této situace se zavádí pojem stopy operátoru.

Věta. Necht U je ohraničená množina s hranicí ∂U třídy C^1 . Necht $1 \leq p < \infty$. Potom existuje jediný lineární operátor $T: W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$ takový, že pokud $u \in C^\infty(\overline{U})$, pak $Tu = u|_{\partial U}$, a že pro $u \in W^{1,p}(U)$ je $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(U)}$, kde konstanta c závisí pouze na p a U .

Definice. Funkce Tu z předchozí věty se nazývá *stopa funkce u na ∂U* .

Poznámka. Existují funkce z $L^p(\partial U)$, které nejsou stopou žádné funkce $u \in W^{1,p}(U)$.

Věty o aproximaci dávají prvky $u \in W^{k,p}(U)$ jako limity posloupností funkcí $u_m \in C^\infty$ na U . Uzávěr prostoru $C_c^\infty(U)$ ve $W^{k,p}(U)$ není celý prostor $W^{k,p}(U)$, ale pouze podprostor značený $W_0^{k,p}(U)$.

Věta. *Nechť U je ohraničená množina s hranicí ∂U třídy C^1 a nechť $u \in W^{1,p}(U)$, kde $1 \leq p < \infty$. Pak platí: $u \in W_0^{1,p}(U) \Leftrightarrow Tu = 0$ na ∂U .*

Z definice Sobolevova prostoru je zřejmé, že libovolný prvek z $W^{l,p}(U)$ je také prvkem $W^{k,p}(U)$ pro $k \leq l$. Nyní se podíváme na takové vztahy.

Definice. Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory takové, že $X \subseteq Y$. Řekneme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y , píšeme $X \hookrightarrow Y$, je-li identické zobrazení $i: X \rightarrow Y$ spojitě.

Poznámka. Zřejmě $X \hookrightarrow Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ a existuje konstanta c taková, že

$$(10.1) \quad \|u\|_Y \leq c \cdot \|u\|_X, \quad u \in X$$

Při úpravách PDE hrají nerovnosti typu (10.1) klíčovou roli.

Věta (Galiardova-Niernbergova-Sobolevova nerovnost). *Nechť $1 \leq p < n$. Existuje konstanta c závisící pouze na n a p taková, že*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

pro libovolné $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, kde $p^* = \frac{np}{n-p}$, tj. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Věta. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina s hranicí ∂U třídy C^1 . Nechť $1 \leq p < n$ a $u \in W^{1,p}(U)$. Potom $u \in L^{p^*}(U)$ a platí*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

kde konstanta c závisí pouze na p a U .

Věta (Poincarého nerovnost). *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená a $u \in W_0^{1,p}(U)$ pro $1 \leq p < n$. Potom platí*

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq c \cdot \|Du\|_{L^p(U)},$$

kde konstanta c závisí pouze na p a U .

V teorii ODE se často uvažuje třída lipschitzovsky spojitých funkcí, tj. funkcí $u: U \rightarrow \mathbb{R}$, pro které je splněn odhad

$$|u(x) - u(y)| \leq c \cdot |x - y|$$

pro jisté $c > 0$ a všechna $x, y \in U$.

V teorii PDE se častěji uvažují funkce splňující odhad

$$|u(x) - u(y)| \leq c \cdot |x - y|^\gamma$$

pro jisté $c > 0$ a pro všechna $x, y \in U$. Tyto funkce se nazývají *hölderovské* (*hölderovsky spojitě*) s *exponentem γ* . Zřejmě stačí uvažovat pouze případ, kdy $0 < \gamma \leq 1$.

Definice. Je-li $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ohraničená a spojitá funkce, klademe

$$\|u\|_{C^0(\bar{U})} = \sup_{x \in \bar{U}} |u(x)|.$$

Navíc γ -hölderovskou seminormou funkce u rozumíme číslo

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \sup_{\substack{x,y \in \bar{U} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Definice. Hölderovým prostorem $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ nazveme prstor všech funkcí $u \in C^k(\bar{U})$, pro které je tzv. γ -hölderovská norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C^0(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

konečná.

Věta. Prostor $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ je Banachův.

Věta (Morevova nerovnost). *Nechť $n < p \leq \infty$. Potom existuje konstanta c závisící pouze na p a n taková, že*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

pro libovolnou funkci $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, kde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Definice. Řekneme, že funkce u^* je verze dané funkce u , pokud $u = u^*$ skoro všude.

Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina s hranicí třídy C^1 . Nechť $n < p \leq \infty$ a dále $u \in W^{1,p}(U)$. Potom pro $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ existuje verze $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$ a platí, že*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

kde konstanta c závisí pouze na p a U .

Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina s hranicí třídy C^1 , $u \in W^{k,p}(U)$.*

1. *Je-li $k < \frac{n}{p}$, pak $u \in L^q(U)$, kde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ a platí*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

kde konstanta c závisí jen na k , p a U .

2. *Je-li $k > \frac{n}{p}$, pak existuje verze $u^* \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\bar{U})$, kde*

$$\gamma = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p} & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \text{libovolné číslo } z (0, 1) & \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a platí

$$\|u^*\|_{C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\bar{U})} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

kde konstanta c závisí jen na k , p a U .

Definice. Necht X, Y jsou normované vektorové prostory. Zobrazení $F: X \rightarrow Y$ se nazývá *kompaktní*, jestliže je spojitý na X a pro každou ohraničenou množinu $M \subseteq X$ je její obraz prekompaktní v Y (tj. $\overline{M}$ je kompaktní v Y).

Definice. Necht X, Y jsou normované vektorové prostory takové, že $X \subseteq Y$. Řekneme, že prostor X je *kompaktně vnořen* do prostoru Y , píšeme $X \subset\subset Y$, je-li identické zobrazení kompaktní.

Poznámka. Jsou-li X, Y Banachovy prostory, pak $X \subset\subset Y$ právě tehdy, když platí

1. $X \subseteq Y$
2. $\exists c > 0$ takové, že $\|u\|_Y \leq c \cdot \|u\|_X$ pro všechna $u \in X$
3. každá posloupnost ohraničená v X je prekompaktní v Y

Věta (Relichova). Necht $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a necht $1 \leq p < n$. Potom je

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

pro každé $1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p}$.

Je-li X reálný Banachův prostor, pak každý ohraničený lineární operátor $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *ohraničený lineární funkcionál na X* . Množina všech ohraničených lineárních funkcionálů na X se značí X^* a nazývá se *duální (adjungovaný) prostor k X* .

V teorii PDE potřebujeme duální prostor k prostoru $H_0^1 = W_0^{1,2}$. Tento duální prostor se označuje jako H^{-1} (pro danou množinu U jako $H^{-1}(U)$).

Definice. Pro $f \in H^{-1}(U)$ zavádíme normu

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup\{|f(u)|; u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

Věta. Funkcionál $f \in H^{-1}(U)$, právě když existují funkce $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(U)$ takové, že

$$(10.2) \quad f(v) = \int_U \left(f^0 \cdot v + \sum_{i=1}^n f^i \cdot v_{x_i} \right) dx$$

pro $v \in H_0^1(U)$.

Poznámka. Kdykoli platí (10.2), je zvykem psát $f = f^0 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i$.

Věta. Pro $f \in H^{-1}(U)$ platí

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left(\int_U \sum_{i=0}^n (f^i)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ; f_i \in L^2(U) \text{ jsou libovolné funkce splňující (10.2)} \right\}.$$