

- (i) $x' = A(t)x(t) + b(t)$
(ii) $x' = A(t)x(t) + b(t),$ $x(t_0) = \xi$
(iii) $y' = A(t)y$
(iv) $y' = A(t)y,$ $y(t_0) = 0$

Věta. Nechť $t_0 \in I, \xi \in \mathbb{R}^n$. Jsou-li funkce $A(t)$ a $b(t)$ spojité na intervalu I , pak n -vektorová funkce $x = \varphi(t)$ je řešením počáteční úlohy (ii) právě tehdy, když $x = \varphi(t)$ vyhovuje rovnici $\varphi(t) = \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds$

Věta (O existenci a jednoznačnosti řešení lineární rovnice). Nechť maticová funkce $A(t)$ a n -vektorová funkce $b(t)$ jsou spojité na intervalu I . Nechť $t_0 \in I, \xi \in \mathbb{R}^n$. Pak počáteční úloha (ii) má jediné úplné řešení. Toto řešení je definované na celém intervalu I .

Můžeme ho získat jako limitu tzv. Picardovy posloupnosti postupných aproximací $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$
 $\varphi_0(t) = 0$
 $\varphi_{k+1}(t) = \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] ds$

Věta (Princip superpozice). Nechť $x_1(t)$ respektive $x_2(t)$ jsou řešení rovnice $x' = A(t)x + b_1(t)$ respektive $x' = A(t)x + b_2(t)$. Jsou-li c_1, c_2 konstanty, pak $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ je řešení rovnice $x' = A(t)x + c_1b_1(t) + c_2b_2(t)$

Věta. Počáteční úloha (iv) má jediné úplné řešení, a to řešení $y(t) \equiv 0$ na I .

Definice. Libovolnou bázi vektorového prostoru všech řešení rovnice (iii) nazýváme fundamentální systém řešení rovnice (iii).

- (v) $Y' = A(t)Y$
(vi) $Y' = A(t)Y,$ $Y(t_0) = Y_0$

Definice. Lze-li každé řešení rovnice (iii) psát ve tvaru $Y(t) \cdot c$, kde c je konstantní n -rozměrný vektor, nazývá se $Y(t)$ fundamentální matice rovnice (iii).

Poznámka. Je-li C konstantní čtvercová matice řádu n a je-li $Y(t)$ řešení (v), pak je $Y(t)C$ opět řešení (v).

Poznámka. Je-li $\tilde{Y}(t)$ fundamentální matice rovnice (iii), pak libovolnou fundamentální matici rovnice (iii) lze psát ve tvaru $Y(t) = \tilde{Y}(t)C$, kde C je vhodná regulární matice $n \times n$.

Poznámka. Je-li $\tilde{Y}(t)$ fundamentální matice rovnice (iii), pak řešení počáteční úlohy (vi) je tvaru $Y(t) = \tilde{Y}(t)Y^{-1}(t_0)Y_0$.

Věta (Jacobiho formule). Je-li $Y(t)$ řešením maticové rovnice (v), pak pro libovolné $t, t_0 \in I$
 $\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds}$

Věta. Je-li $Y(t)$ fundamentální matice rovnice (v), pak je řešení počáteční úlohy (ii)
 $x(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0) \cdot \xi + Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds.$

(Gronwallovo). Necht $u(t), v(t)$ jsou skalární, spojitě, nezáporné funkce na intervalu J , necht $t_0 \in J$ a $c \geq 0$ je konstanta.

Jestliže $u(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t u(s) \cdot v(s) ds \right|$, pak $u(t) \leq c \cdot e^{\left| \int_{t_0}^t v(s) ds \right|}$ pro $t \in J$.

$$(1) \quad x' = f(t, x)$$

Věta (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti). Necht n -vektorová funkce f je spojitá na množině $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| < b\}$, kde $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a, b > 0$. Necht f splňuje v D Lipschitzovu podmínku.

Pak počáteční úloha (1), $x(t_0) = x_0$ má na intervalu $\langle t_0 - a, t_0 + a \rangle$ jediné řešení.

Věta (Peanova věta o existenci). Necht n -vektorová funkce $f(t, x)$ je spojitá na množině $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b\}$, kde $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a, b > 0$.

Pak počáteční úloha (1), $x(t_0) = x_0$ má alespoň jedno řešení definované na intervalu $\langle t_0 - a, t_0 + a \rangle$.

Věta (Schauderova věta o pevném bodu). Necht $\mathcal{F}$ je normovaný lineární prostor. Necht $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ je neprázdná konvexní uzavřená množina. Necht $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ je spojitě zobrazení. Jestliže $T\mathcal{M}$ je relativně kompaktní, pak zobrazení T má alespoň jeden pevný bod.

Věta (Ascoliho, Arzeláova). Necht $\mathcal{M}$ je systém n -rozměrných vektorových funkcí definovaných na intervalu J a necht funkce systému $\mathcal{M}$ jsou rovnomocně spojitě a stejnoměrně ohraničené. Pak v každé posloupnosti funkcí systému $\mathcal{M}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Jestliže všechny konvergentní podposloupnosti vybrané z posloupnosti $\{x_n(t)\}$ mají tutéž limitu, pak není třeba přecházet k posloupnosti vybrané, ale přímo posloupnosti $\{x_n(t)\}$ je konvergentní a má tuto limitu.

Věta (O globální jednoznačnosti). Necht n -vektorová funkce f splňuje v Ω lokálně Lipschitzovu podmínku. Jsou-li $x_1(t), x_2(t)$ řešení rovnice (1) taková, že pro nějaké t_0 platí $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, pak $x_1(t) \equiv x_2(t)$ na celém intervalu, kde jsou obě řešení definována.

Věta (O globální existenci). Necht $x(t)$ je úplné řešení rovnice (1) a necht jeho existenční interval je (T_1, T_2) . Pak všechny limitní body řešení $x(t)$ pro $t \rightarrow T_2-$, pro $t \rightarrow T_1+$ leží na hranici Ω . Tedy každé řešení se dá prodloužit až k hranici Ω .

Věta (O spojitě závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametru). Necht $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m$ a necht $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, kde $d = n + m + 1$ je oblast. Necht $f(x, t, \lambda): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá n -vektorová funkce taková, že pro každé $(\tau, \xi, \lambda) \in \Omega$ má počáteční úloha

$$(*) \quad x' = f(t, x, \lambda), x(\tau) = \xi$$

jediné úplné řešení $\varphi(t, \tau, \xi, \lambda)$, pak řešení φ je spojitou funkcí proměnných t, τ, ξ, λ na množině $\{(t, \tau, \xi, \lambda) \mid (\tau, \xi, \lambda) \in \Omega, t \in I\}$, kde $I = I(\tau, \xi, \lambda)$ je existenční interval $\varphi(\cdot, \tau, \xi, \lambda)$.

Věta (O spojitě diferencovatelnosti řešení). Necht $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je oblast podobně jako v předchozí větě. Necht n -vektorová funkce $f(t, x, \lambda)$ je třídy C^j , kde $j \in \mathbb{N}$, vzhledem ke všem svým proměnným. Pak řešení $\varphi(t, \tau, \xi, \lambda)$ počáteční úlohy (*) je třídy C^j v celém svém oboru vzhledem ke všem svým proměnným.

$$(2) \quad y' = A(t) y$$

$$(3) \quad x' = A(t) x + g(t, x)$$

Definice. Řekneme, že řešení $x_0(t)$ rovnice (1) je Ljapunovsky stabilní, jestliže $\forall \epsilon > 0$ a $\forall t_1 \geq t_0$ $\exists \delta = \delta(\epsilon, t_1) > 0$ takové, že libovolné řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující podmínku $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ je definováno $\forall t \geq t_1$ a $\forall t \geq t_1$ platí $|x(t) - x_0(t)| < \epsilon$.

Řešení $x_0(t)$ se nazývá nestabilní, jestliže není Ljapunovsky stabilní.

Definice. Řekneme, že řešení $x_0(t)$ rovnice (1) je stejnoměrně stabilní, jestliže $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ takové, že $\forall t_1 \geq t_0$ je libovolné řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující podmínku $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ definováno $\forall t \geq t_1$ a pro všechna tato řešení platí $|x(t) - x_0(t)| < \epsilon$.

Definice. Řekneme, že řešení $x_0(t)$ rovnice (1) je asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a navíc $\forall t_1 \geq t_0 \exists \delta_1 = \delta_1(t_1) > 0$ takové, že pro každé řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta_1$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$.

Definice. Řekneme, že řešení $x_0(t)$ rovnice (1) definované na intervalu $\langle t_0, \infty \rangle$ je exponenciálně stabilní, jestliže existují konstanty $K > 0$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ takové, že pro každé $t_1 \geq t_0$ a každé řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ platí pro $t \geq t_1$ nerovnost $|x(t) - x_0(t)| \leq K \cdot |x(t_1) - x_0(t_1)| e^{-\alpha(t-t_1)}$.

Věta. Nulové řešení $x_0(t) \equiv 0$ rovnice (2) je stabilní právě tehdy, když $\exists K > 0$ takové, že $|Y(t)| \leq K$ pro $\forall t \in \langle t_0, \infty \rangle$.

Věta. Nulové řešení $x_0(t) \equiv 0$ rovnice $y' = Ay$ pro konstantní matici A je stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice A mají nekladné reálné části, přičemž všechna vlastní čísla s nulovými reálnými částmi jsou jednoduchého typu.

Věta. Nulové řešení lineární rovnice (2) je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když $\exists K > 0$ takové, že $\forall t \geq s \geq t_0$ platí $|Y(t) \cdot Y^{-1}(s)| \leq K$.

Věta. Konstantní řešení autonomní rovnice $x' = f(x)$ je stabilní právě tehdy, když je stejnoměrně stabilní.

$$(4) \quad |Y(t)| \leq K \quad t \in \langle t_0, \infty \rangle$$

$$(5) \quad |Y(t) \cdot Y^{-1}(s)| \leq K \quad t \geq s \geq t_0$$

Věta. Nechť nulové řešení lineární rovnice (2) je stejnoměrně stabilní (je splněna podmínka (5)). Nechť existuje spojitá nezáporná funkce $\gamma(t)$ definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty \rangle = J$ taková, že $g(t, x) \leq \gamma(t) \cdot |x|$ pro $(t, x) \in D$ a $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$. Pak nulové řešení perturbované rovnice (3) je stejnoměrně stabilní.

Věta. Nulové řešení lineárního systému (2) je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow |Y(t)| \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$.

Věta. Nulové řešení rovnice $y' = Ay$, kde A je konstantní matice, je asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice A mají záporné reálné části.

Věta. Nechť existuje konstanta $K > 0$ taková, že $\int_{t_0}^t |Y(t) Y^{-1}(s)| ds \leq K$ pro $\forall t \geq t_0$. Nechť existuje konstanta $\gamma > 0$ taková, že $\gamma < K^{-1}$ a $|g(t, x)| \leq \gamma \cdot |x|$ pro $\forall (t, x) \in D$. Pak nulové řešení perturbované rovnice (3) je asymptoticky stabilní.

Věta. Nulové řešení rovnice (2) je exponenciálně stabilní právě tehdy, když $\exists K > 0$, $\alpha > 0$ takové, že pro $t \geq s \geq t_0$ platí $|Y(t) Y^{-1}(s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}$.

Věta. Nulové řešení rovnice $y' = Ay$, kde A je konstantní matice, je exponenciálně stabilní $\Leftrightarrow$ je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ všechna vlastní čísla matice A mají záporné reálné části.

Věta. Nechť nulové řešení rovnice (2) je exponenciálně stabilní (tj. $\exists K > 0, \alpha > 0$ takové, že $|Y(t)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ pro $t \geq s \geq t_0$), nechť $|g(t, x)| \leq \gamma \cdot |x|$ pro $(t, x) \in D$, kde $\gamma < K^{-1}\alpha$. Pak nulové řešení perturbované lineární rovnice (3) je rovněž exponenciálně stabilní.

Věta. Nechť A je konstantní matice a nechť alespoň jedno vlastní číslo matice A má kladnou reálnou část. Nechť perturbace $g(t, x)$ je malá v tom smyslu, že $\frac{|g(t, x)|}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ na J pro $x \rightarrow 0$. Pak nulové řešení perturbované lineární rovnice $x' = Ax + g(t, x)$ je nestabilní.

Věta (Metoda linearizace). Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřené množině $D^* \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $x_0 \in D^*$ a $f(x_0) = 0$. Nechť funkce $f(x)$ je po složkách diferencovatelná v okolí bodu x_0 .

Je-li lineární systém $x' = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x=x_0} x$ asymptoticky stabilní, pak řešení $x_0(t) \equiv 0$ systému

$x' = f(x)$ je exponenciálně stabilní, kde $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x=x_0}$ je Jacobiho matice v bodě x_0 .

Má-li Jacobiho matice $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x=x_0}$ alespoň jedno vlastní číslo s kladnou reálnou částí, pak je řešení $x_0(t) \equiv 0$ systému $x' = f(x)$ nestabilní.

Definice. Reálnou funkci $V(x)$ definovanou v okolí G počátku $\mathbb{R}^n$ nazveme pozitivně (negativně) definitní, jestliže $V(0) = 0$ a $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) pro $x \in G \setminus \{0\}$

Definice. Spojitou reálnou funkci $V(x)$ nazveme Ljapunovskou funkcí systému $x' = f(x)$ v okolí G počátku, jestliže je pozitivně definitní a jestliže pro každé řešení $x(t)$ daného systému takové, že $x(t_1) \in G$ v nějakém t_1 platí, že funkce $V(x(t))$ je nerostoucí pro všechna $t \geq t_1$ pro něž $x(t) \in G$.

Věta. Existuje-li k systému $x' = f(x)$ Ljapunovská funkce, pak je nulové řešení $x_0(t) \equiv 0$ tohoto systému stejnoměrně stabilní.

Věta. Nechť v okolí G počátku existuje funkce $V(x)$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu, která je pozitivně definitní a taková, že $\frac{dV(x)}{dt}$ je negativně definitní funkce v G . Pak je nulové řešení $x_0(t) \equiv 0$ asymptoticky stabilní.

Věta. Nechť v okolí G počátku existuje funkce $V(x)$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu taková, že $V(0) = 0$ a v libovolném okolí počátku existuje bod, ve kterém nabývá funkce V kladné hodnoty. Jestliže je $\frac{dV(x)}{dt}$ pozitivně definitní, pak je nulové řešení $x_0(t) \equiv 0$ nestabilní.