

1 Míra

Def 1.1: Bud' $X \neq \emptyset$ množina, $\mathcal{A}$ neprázdný systém podmnožin X . (Tj. $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq 2^X$)

$\mathcal{A}$ se nazývá **okruh** na X , jestliže:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ se nazývá **algebra** na X , jestliže:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ se nazývá **σ -okruh** na X , jestliže:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ se nazývá **σ -algebra** na X , jestliže:

$$X \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Lemma 1.2: Bud' $\mathcal{A}$ σ -algebra na X , pak:

$$\emptyset \in \mathcal{A}$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$$

Lemma 1.2: Bud' $\mathcal{A}_i$ σ -algebra na X pro $\forall i \in I$. Pak je $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ také σ -algebra na X .

Věta 1.3: Bud' $\mathcal{B} \neq \emptyset$ libovolný systém podmnožin množiny X . Pak existuje jediná σ -algebra $\mathcal{A}$ na X taková, že:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^* \text{ } \sigma\text{-algebra na } X \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$$

Def 1.4: Bud' $\mathcal{B} \neq \emptyset$ systém podmnožin množiny X . Pak se σ -algebra $\mathcal{A}$ z předchozí věty nazývá **σ -algebra na X generovaná systémem $\mathcal{B}$** .

Def 1.5: Bud' X metrický prostor. Pak se σ -algebra na X generovaná systémem všech otevřených podmnožin v X nazývá **systém borelovských podmnožin v X** .

Def 1.6: Bud' $X \neq \emptyset$. **Mírou** na X rozumíme množinovou funkci μ definovanou na nějaké σ -algebře $\mathcal{A}$ na X , která splňuje:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \infty$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \text{ po dvou disjunktní } \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Číslo $\mu(A)$ se nazývá **mírou množiny A** .

Prvky σ -algebry $\mathcal{A}$ se nazývají **měřitelné množiny** vzhledem k míře μ .

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá **měřitelný prostor**.

Lemma 1.7: Vlastnosti měr

Bud' μ míra na σ -algebře $\mathcal{A}$ na X . Pak platí:

$$A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

$$A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

Věta 1.8: Bud' μ míra na σ -algebře $\mathcal{A}$ na X . Pak platí:

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots, A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots, \mu(A_1) < \infty, A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Lemma 1.9: Bud' μ míra na σ -algebře $\mathcal{A}$ na X . Pak platí:

$$A, B \in \mathcal{A}, \mu(A \cap B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \mu(A_i \cap A_j) = 0, \text{ pro } i \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Def 1.10: Řekneme, že:

míra μ je úplná na X , jestliže je každá podmnožina množiny míry 0 také μ -měřitelná.

tj. $A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{A}$ (zřejmě pak $\mu(B) = 0$)

množina $A \in \mathcal{A}$ je konečné míry, jestliže $\mu(A) < \infty$

množina $A \in \mathcal{A}$ je σ -konečné míry, jestliže $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty$

míra μ na X je konečná, jestliže $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty$

míra μ na X je σ -konečná, jestliže $\forall A \in \mathcal{A}$ je σ -konečné míry

míra μ na X je pravděpodobnostní, jestliže $\mu(X) = 1$

Každou míru na σ -algebře $\mathcal{A}$ na X lze „rozšířit“ na úplnou míru.

Doplníme do $\mathcal{A}$ všechny množiny, které se od původně měřitelných množin liší o množinu míry 0.

Věta 1.11: Necht' μ je míra na σ -algebře $\mathcal{A}$ na X . Bud' $\mathcal{N} = \{B \subseteq X \mid \exists N \in \mathcal{A} \text{ taková, že } \mu(N) = 0, B \subseteq N\}$

Označme $\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{N}\}$ a definujme na $\overline{\mathcal{A}}$ množinovou funkci $\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$

pro $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{N}$.

Pak $\overline{\mathcal{A}}$ je σ -algebra na X , $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{A}}$ přičemž $\overline{\mu}(A) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{A}$

tj. $\overline{\mu}$ je rozšíření - zúplnění míry μ .

Poznámka: Zřejmě je $\emptyset \in \mathcal{N}$

2 Vnější míra

Def 2.1: Bud' $X \neq \emptyset$. **Vnější mírou** rozumíme množinovou funkci μ^* definovanou na σ -algebře 2^X všech podmnožin množiny X s těmito vlastnostmi:

$$A \subseteq X \Rightarrow 0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$$

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A \in X, A_n \in X, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Lemma 2.2: Bud' μ^* vnější míra na X . Pak platí:

$$A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

$$A_n \subseteq X, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$A, B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Def 2.3: Bud' $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ systém podmnožin množiny X takový, že $\emptyset \in \mathcal{B}$. Necht' λ je množinová funkce na $\mathcal{B}$: $\lambda: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, $\lambda(\emptyset) = 0$. Pak se dvojice $(\mathcal{B}, \lambda)$ nazývá **pokrývací systém** na X .

Věta 2.3: Bud' $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{B}, \lambda)$ pokrývací systém na X , $A \subseteq X$.

$$\text{Položme } \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n) \mid G_n \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \right\}.$$

Pak je μ^* vnější mírou na X .

Def 2.4: *Carathéodoryho definice měřitelnosti*

Bud' $X \neq \emptyset$, μ^* vnější míra na X . **Množina** $A \subseteq X$ se nazývá μ^* **měřitelná**, jestliže $\forall T \subseteq X$ platí:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A), \text{ přičemž } T \text{ se nazývá } \textbf{testovací množina}.$$

Lemma 2.5: $A \subseteq X$ je μ^* měřitelná $\Leftrightarrow \forall T \subseteq X, \mu^*(T) < \infty$ platí: $\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A) \leq \mu^*(T)$

Věta 2.6: *Carathéodoryho konstrukce míry*

Bud' $X \neq \emptyset$, μ^* vnější míra na X .

Systém $\mathcal{M}$ všech μ^* měřitelných množin je σ -algebra na X a μ^* je úplná míra na $\mathcal{M}$.

Def 2.7: Bud' (X, ρ) metrický prostor, μ^* vnější míra na X . Pak se μ^* nazývá **metrická vnější míra**, jestliže $A, B \subseteq X, \rho(A, B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Tvrzení 2.8: Bud' μ^* metrická vnější míra na metrickém prostoru X .

Pak je každá otevřená množina v X μ^* -měřitelná.

Důsledek 2.9: Je-li μ^* metrická vnější míra na X , pak jsou všechny borelovské množiny měřitelné.

Def 2.10: Nezápornou množinovou funkci μ nazveme **pramírou** na X , jestliže je μ definována na nějakém okruhu $\mathcal{B}$ na X a μ splňuje:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \text{ po dvou disjunktní, } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Věta 2.11: Bud' $\mathcal{B}$ okruh podmnožin množiny X a necht' μ je pramíra definovaná na $\mathcal{B}$. Potom vnější míra μ^* z Carathéodoryho konstrukce splňuje:

$$\forall G \in \mathcal{B}: \mu^*(G) = \mu(G)$$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$$

Věta 2.12: Bud' $\mathcal{B}$ algebra podmnožin množiny X . Necht' je μ σ -konečná pramíra na $\mathcal{B}$.

Pak je vnější míra μ^* z Carathéodoryho konstrukce v předcházející větě určena jednoznačně.

3 Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$

Def: Necht' $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, a_i < b_i \forall i : 1 \leq i \leq n$

Množina $I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : a_i < x_i < b_i\}$ se nazývá **otevřený interval v $\mathbb{R}^n$** .

Číslo $vol(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$ se nazývá **objem intervalu I**

Tvrzení: Bud' $\mathcal{B}$ systém všech otevřených intervalů v $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{B}$, a pro $I \in \mathcal{B}$ položme $\lambda(I) = vol(I), \lambda(\emptyset) = 0$. Pak je $(\mathcal{B}, \lambda)$ pokrývací systém na $\mathbb{R}^n$.

Def: 3.1 Vnější míra μ^* na $\mathbb{R}^n$ generovaná systémem $(\mathcal{B}, \lambda)$ se nazývá **vnější Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$** ozn. $\mu^* = \lambda^*$

Označení: Necht' $\delta > 0$ je pevně zvolené. Symbolem $(\mathcal{B}_\delta, \lambda)$ označme pokrývací systém na $\mathbb{R}^n$ vytvořený shodně jako $(\mathcal{B}, \lambda)$, ale obsahující pouze ty intervaly $I \in \mathcal{B}$ jejichž průměr je menší než δ . Pak je $\mathcal{B}_\delta \subseteq \mathcal{B}$. Označme dále λ_δ^* příslušnou vnější míru generovanu pokrývacím systémem $(\mathcal{B}_\delta, \lambda)$.

Lemma 3.2: $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\lambda_\delta^*(A) = \lambda^*(A)$

Věta 3.3: Vnější Lebesgueova míra λ^* na $\mathbb{R}^n$ je metrická vnější míra.

tj. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, \rho(A, B) > 0 \Rightarrow \lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$

Def 3.4: Bud' λ^* vnější Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$. Pak se σ -algebra $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ všech λ^* měřitelných množin (ve smyslu Carathéodoryho konstrukce) nazývá **systémem Lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$** a míra $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ **Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$** .

Důsledek 3.5: Každá borelovská množina je Lebesgueovsky měřitelná.

Zejména každá uzavřená, otevřená, typu F_σ, G_δ je Lebesgueovsky měřitelná.

Def: Množinou typu F_σ nazveme množinu, která vznikla jako spočetné sjednocení uzavřených množin.

Množinou typu G_δ nazveme množinu, která vznikla jako spočetný průnik otevřených množin.

Věta 3.6: Lebesgueova míra λ v $\mathbb{R}^n$ je úplná, metrická, σ -konečná.

Navíc je určena jednoznačně v tom smyslu, že $\forall I : \lambda(I) = vol(I)$

Def: Pokud je $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, tj. $\mu = \mu^*$, tj. Carathéodoryho konstrukce nevytvoří nic nového z původní míry μ , pak se μ nazývá **regulární míra**. Tj. regulární míra je definovaná na maximálním systému měřitelných množin.

Věta 3.7: Bud' $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

A je Lebesgueovsky měřitelná ($A \in \mathcal{L}$)

$\forall \epsilon > 0, \exists$ otevřená množina $G \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subseteq G \wedge \lambda(G - A) < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0, \exists$ uzavřená množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $F \subseteq A \wedge \lambda(A - F) < \epsilon$

$\exists$ množiny $H, N \subseteq \mathbb{R}^n$ takové, že H je typu $G_\delta, \lambda(N) = 0, A = H - N$

$\exists$ množiny $K, N \subseteq \mathbb{R}^n$ takové, že K je typu $F_\sigma, \lambda(N) = 0, A = K \cup N$

Věta: (Vitali) Je-li množina A s vnější mírou > 0 , pak $\exists S \subseteq A$ taková, že $S \notin \mathcal{M}$ tedy S není měřitelná.

4 Měřitelné funkce

Def: Bud' $X \neq \emptyset$ množina, $\mathcal{M}$ σ -algebra na X , μ míra na $\mathcal{M}$. Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se nazývá **měřitelný prostor** (též prostor s mírou). Prvky $A \in \mathcal{M}$ se nazývají **měřitelné**.

Def: Zobrazení $f : A \rightarrow \mathbb{R}^*$, kde $A \subseteq X$ se nazývá **reálná funkce** na množině A .
 f nazýváme **konečnou funkcí**, jestliže obor hodnot $H(f) \subseteq \mathbb{R}$

Def 4.1: Bud' f reálná funkce na A . f se nazývá **měřitelná funkce**, jestliže:

- (1) $A \in \mathcal{M}$ (A je měřitelná množina)
- (2) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in A \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

Lemma 4.2: Bud' f reálná funkce na $A \in \mathcal{M}$. Pak jsou tyto výroky ekvivalentní:

- (1) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in A \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$ tedy f je měřitelná funkce
- (2) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in A \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$
- (3) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in A \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}$
- (4) $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in A \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

Věta 4.3: Bud' f měřitelná funkce na množině $A \in \mathcal{M} \Rightarrow$ pro $\forall$ borelovskou množinu $U \subseteq \mathbb{R}$ je množina $f^{-1}(U)$ měřitelná. Tedy vzory borelovských množin jsou měřitelné.

Lemma 4.4: Bud' f, g měřitelná funkce na $A \in \mathcal{M}$. Pak jsou následující množiny měřitelné:

- $$\begin{aligned} &\{x \in A \mid f(x) < g(x)\} \\ &\{x \in A \mid f(x) \leq g(x)\} \\ &\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \end{aligned}$$

Věta 4.5: Bud' f, g měřitelné funkce na $A \in \mathcal{M}$, bud' $c \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $c \cdot f, f \pm g, f \cdot g$ měřitelné na A .
 Je-li navíc $g(x) \neq 0$ na A , pak je funkce $\frac{f}{g}$ měřitelná.

Věta 4.6: Jsou-li f, g měřitelná funkce, pak $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ jsou také měřitelné funkce.

Označení: pro $\forall a \in \mathbb{R}$ označme $a^+ = \max\{a, 0\}$

$$a^- = \max\{-a, 0\}$$

$$\text{pak platí: } a^+ \geq 0, a^- \geq 0, a = a^+ - a^-, |a| = a^+ + a^-$$

$$\text{pro funkce: } f^+ = \max\{f, 0\}$$

$$f^- = \max\{-f, 0\}$$

$$\text{pak platí: } f^+ \geq 0, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

Důsledek 4.7: Je-li f měřitelná funkce, pak jsou měřitelné i funkce $f^+, f^-, |f|$.

Lemma 4.8: Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí. Pak jsou funkce $h = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, d = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ měřitelné.

Věta 4.9: Jsou-li funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ měřitelné a konverguje-li posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodově na množině A k funkci f , pak je $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ měřitelná funkce.

Věta 4.10: Bud' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, která je spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak je f měřitelná funkce na I .

Def: Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost konečných funkcí na množině A . f konečná funkce na $A \in \mathcal{M}$.

Řekneme, že **posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle míry** na A k f (píšeme $f_n \Rightarrow f$, jestliže:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ platí: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in A \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

Tvrzení: Necht' $A = I \subseteq \mathbb{R}$, pak platí:

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{\text{stejněm} \text{ěrn} \text{á}} f \text{ na } I &\Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ na } I &\Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ s. v. na } I &\Rightarrow f_n \Rightarrow f \text{ na } I \\ &\text{bodová konvergence} &\text{konvergence skoro všude} &\text{konvergence podle míry } \lambda \end{aligned}$$

5 Abstraktní teorie integrálu

$(X, \mathcal{M}, \mu) \dots$ měřitelný prostor, $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{M}$
 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^*$

Def 5.1: f se nazývá **jednoduchá funkce**, je-li konečná, měřitelná, nezáporná a množina jejich funkčních hodnot je konečná.

Necht' je f jednoduchá funkce na $A \in \mathcal{M}$, necht' $H(f) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, kde a_i jsou navzájem různé, nezáporné hodnoty funkce f .

Označme $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak $A_i \in \mathcal{M}$, jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.

$$\Rightarrow f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$$

Naopak jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ a jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, \infty)$ navzájem různé hodnoty, pak je funkce $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ jednoduchá.

Lemma 5.2: *Reprezentace jednoduché funkce*

Každou jednoduchou funkci f lze jednoznačně vyjádřit v tzv. kanonickém tvaru $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{M}$,

kde $a_i \geq 0, \forall i \neq j : a_i \neq a_j, A_i \cap A_j = \emptyset$

Lemma 5.3: Pro každou nezápornou měřitelnou funkci f na A existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jednoduchých funkcí taková, že $f_n \nearrow f$ pro $n \rightarrow \infty$, tj. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ monotónně konverguje k f na A .

tj. $\forall x \in A$ je číselná posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ neklesající a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro $n \rightarrow \infty$.

Def 5.4: Bud' f jednoduchá funkce na A , $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ její kanonické vyjádření. **Integrálem funkce f**

přes množinu A vzhledem k míře μ rozumíme číslo $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$.

Poznámka: Volbou $\mu = \lambda, \mathcal{M} = \mathcal{L}$ dostáváme Lebesgueův integrál.

Je-li zřejmé o kterou míru se jedná, píšeme pouze $\int_A f$

Lemma 5.5: Bud' f, g jednoduché funkce na množině A . $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$. Pak platí:

- 1) $\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f \quad \dots$ konstantní násobek
- 2) $\int_A f + g = \int_A f + \int_A g \quad \dots$ aditivita
- 3) $f \leq g \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g \quad \dots$ monotonie

Poznámka: Bud' f jednoduchá funkce na A . $B \subseteq A$ měřitelná podmnožina množiny A .

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \text{ kanonické vyjádření } f$$

$$f|_B = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i \cap B} \text{ je kanonické vyjádření zúžení } f|_B \Rightarrow \int_B f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B).$$

Lemma 5.6: Necht' $A = B \cup C$, kde $B, C \in \mathcal{M}$, $B \cap C = \emptyset$. Bud' f jednoduchá funkce na A . Pak $\int_A f = \int_B f + \int_C f$

Lemma 5.7: Bud' $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost jednoduchých funkcí. $f_n \nearrow f$, kde f je jednoduchá funkce na A .

Pak: $\int_A f_n \nearrow \int_A f$.

Lemma 5.8: Bud' $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnosti jednoduchých funkcí na $A \in \mathcal{M}$. Necht' $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$.

$$\text{Pak } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \int_A f, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n = \int_A g.$$

Def 5.9: Bud' f nezáporná funkce na množině A . Necht' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jednoduchých funkcí taková, že $f_n \nearrow f$. Definujeme $\int_A f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n$. Je-li navíc $\int_A f < \infty$, pak řekneme, že f je **integrovatelná** na A .

Def 5.10: Bud' f libovolná měřitelná funkce na množině A . Je-li alespoň jedna z funkcí f^+ , f^- integrovatelná na A , pak definujeme: $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$. Řekneme, že f je **integrovatelná** na A , jestliže $\int_A f$ existuje a je konečný.

Věta 5.11: Měřitelná funkce f je integrovatelná na $A \Leftrightarrow f^+$ a f^- jsou integrovatelné na A .

Věta 5.12: Je-li $\mu(A) = 0$, pak je každá měřitelná funkce f na A integrovatelná (a $\int_A f = 0$).

Zejména je-li μ úplná míra, pak je každá funkce integrovatelná na A .

Věta 5.13: Pravidlo návaznosti

Je-li $A = B \cup C$, kde $B, C \in \mathcal{M}$, $B \cap C = \emptyset$. Pak pro každou měřitelnou funkci f na A platí:

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f, \text{ má-li levá nebo pravá strana této rovnosti smysl.}$$

Důsledek 5.14: Existuje-li $\int_A f$, pak existuje $\int_B f$ pro $\forall B \subseteq A, B \in \mathcal{M}$.

Zejména je-li f integrovatelná na $A \Rightarrow f$ je integrovatelná na $B \forall B \subseteq A, B \in \mathcal{M}$.

Věta 5.15: Monotonie integrálu

Pokud existuje $\int_A f, \int_A g$ a je-li $f \leq g$ na $A \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$.

Def: Řekneme, že **skoro všechny** body měřitelné množiny $A \subseteq X$ mají nějakou vlastnost V , jestliže má množina bodů $x \in A$, které tuto vlastnost nemají, míru nula. Píšeme zkráceně s.v. na A .

Věta 5.16 A: Bud' f integrovatelná funkce na A . Pak má množina $B = \{x \in A \mid f(x) = \pm\infty\}$ míru nula.

Ekvivalentně je-li f integrovatelná na A , pak f je s.v. konečná na A .

Poznámka: Symbol $\int_A f$ je definován pro funkci f , která je definovaná pro všechna $x \in A$.

Def 5.16 B: Je-li f definovaná s.v. na A , pak označme $B = \{x \in A \mid f(x) \text{ není definovaná}\}$.

Pak klademe $\int_A f = \int_{A-B} f$, pokud má pravá strana smysl.

Necht' f je definovaná s.v. na A . Položme $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A - B \\ \text{cokoli} & x \in B \end{cases}$.

Klademe $\int_A f = \int_A g$, pokud má pravá strana smysl.

Věta 5.17: Konstantní násobek

Pokud $\exists \int_A f, c \in \mathbb{R}$, pak $\int_A cf = c \cdot \int_A f$. Zejména, je funkce cf integrovatelná, pokud je f integrovatelná.

Věta 5.18: Aditivita

Bud' te f, g měřitelné funkce na A , obě nezáporné nebo integrovatelné. Pak platí $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$

Zejména je součet integrovatelných funkcí také integrovatelná funkce.

Věta 5.19: Pokud existuje $\int_A f$, pak $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

Navíc měřitelná funkce f je integrovatelná na $A \Leftrightarrow$ je zde integrovatelná funkce $|f|$.

Věta 5.20: Bud' f měřitelná, g nezáporná a integrovatelná na A .

Je-li $|f| \leq g$, pak je f integrovatelná a $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq \int_A g$

Důsledek 5.21: Každá ohraničená měřitelná funkce je integrovatelná na měřitelné množině konečné míry.

Věta 5.22: *Lebesgueova věta o monotonním limitním přechodu*

Necht' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnosti nezáporných měřitelných funkcí, $f_n \nearrow f$ na $A \in \mathcal{M}$.

Pak $\int_A f_n \nearrow \int_A f$ pro $n \rightarrow \infty$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)$

Důsledek 5.23: Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na A , $f_n \searrow f$ pro $n \rightarrow \infty$.

Pak $\int_A f_n \searrow \int_A f$ pro $n \rightarrow \infty$

Lemma 5.24: *Fatouovo*

Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných měřitelných funkcí. Pak platí: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \geq \int_A \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right)$

Poznámka 5.24 A: Duální úvahy za stejných předpokladů dávají tvrzení: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \leq \int_A \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right)$

Věta 5.25: *Lebesgueova věta o majorizovaném limitním přechodu*

Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí, $f_n \rightarrow f$ na A (bodově). Necht' existuje integrovatelná funkce g na A taková, že $|f_n| \leq g$ na A pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \int_A f = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)$

Věta 5.26: *σ -aditivita integrálu*

Necht' existuje $\int_A f$ a necht' $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $A_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní. Pak platí: $\int_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f$

Věta 5.27: Bud' f nezáporná a měřitelná na $A \in \mathcal{M}$. Pak je $\int_A f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s. v. na A .

Důsledek 5.28: Necht' f je nezáporná měřitelná funkce definovaná na celém prostoru X .

Potom je množinová funkce ν daná jako $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{M}$ míra na $\mathcal{M}$.

Poznámka: Důsledek 5.28 ukazuje, že teorie míry a integrálu jsou vzájemně propojené.

Pomocí míry μ definujeme integrál vzhledem k míře μ a zpětně lze pomocí integrálu definovat míru ν .

Volbou $f = 1$ dostáváme $\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_A 1 d\mu = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$ tj. $\mu = \nu$

6 Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$

Výchozí prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $A \in \mathcal{M}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^*$ měřitelná funkce

$\leadsto \int_A f d\mu \dots$ abstraktní integrál vzhledem k míře μ

Volbou $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda$ (Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$), $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ je σ -algebra lebesgueovsky měřitelných množin
 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^*$ lebesgueovsky měřitelná funkce $\leadsto \int_A f d\lambda \dots$ Lebesgueův integrál

Označení: $\int_A f d\lambda$ v $\mathbb{R}^n$

$n = 2$: $\iint_A f(x, y) dx dy$

$n = 3$: $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$

$n = 1$: $A = [a, b] \Rightarrow \int_A f d\lambda = \int_{[a, b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Cílem kapitoly je *srovnání* Lebesgueova a Riemannova integrálu. Pro jednoduchost buď v dalším $n = 1$ a $A = [a, b]$

$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx \dots$ Lebesgueův integrál

$(R) \int_a^b f(x) dx \dots$ Riemannův integrál

Poznámka 6.1: Existují funkce, které jsou lebesgueovsky integrovatelné, ale nejsou riemannovsky integrovatelné.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (R) \int_0^1 \chi(x) & \text{není definován - horní a dolní Riemannův integrál se nerovnájí} \\ (\mathcal{L}) \int_0^1 \chi(x) = 0 \end{matrix}$$

Mějme f na $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^*$. Buď $x_0 \in [a, b]$ pevné. Označme pro $\delta > 0$:

- $m_f(\delta, x_0) = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]\}$
- $M_f(\delta, x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]\}$

Pak pro $0 < \delta_1 < \delta_2$ platí:

$m_f(\delta_1, x_0) \geq m_f(\delta_2, x_0) \dots$ infimum přes větší množinu je menší

$M_f(\delta_1, x_0) \leq M_f(\delta_2, x_0) \dots$ supremum přes větší množinu je větší

Funkce $m_f(\delta, x_0)$, $M_f(\delta, x_0)$ jsou monotónní v argumentu $\delta (> 0)$

$$\Rightarrow \exists m_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} m_f(\delta, x_0) = \sup\{m_f(\delta, x_0) \mid \delta > 0\}$$

$$\Rightarrow \exists M_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} M_f(\delta, x_0) = \inf\{M_f(\delta, x_0) \mid \delta > 0\}$$

a platí nerovnosti:

$$m_f(\delta, x_0) \leq m_f(x_0) \leq f(x_0) \leq M_f(x_0) \leq M_f(\delta, x_0)$$

Pro $x \in [a, b]$ uvažujeme funkce:

$$m_f : [a, b] \mapsto m_f(x)$$

$$M_f : [a, b] \mapsto M_f(x)$$

Def 6.2: Buď f funkce definovaná na $[a, b]$. Funkce m_f , M_f se nazývají její **dolní a horní Baireovy funkce**.

Věta 6.3: *Baireova věta*

Necht' f je konečná pro $x_0 \in [a, b]$. f je spojitá v $x_0 \Leftrightarrow m_f(x_0) = M_f(x_0)$

Lemma 6.4: Buď f funkce na $[a, b]$. Necht' $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je nulová posloupnost intervalu $[a, b]$.

Označme $D_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{m_n}^{(n)} = b\}$

položme $m_k^{(n)} = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]\}$ pro $k = 1, \dots, m_n$

a definujme funkci φ_n na $[a, b]$ takto: $\varphi_n(x) = \begin{cases} m_k^{(n)} & x \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}) \\ 0 & x \in \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots\} \end{cases} = D_n$

Pak pro $x \in [a, b]$, $x \neq x_k^{(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, m_n\}$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = m_f(x)$

Poznámka 6.5: Analogické tvrzení platí pro $M_f(x)$

Důsledek 6.6: Bud' f libovolná funkce na $[a, b]$. Pak jsou funkce m_f, M_f měřitelné na $[a, b]$

Věta 6.7: *Lebesgueova*

Pro ohraničenou funkci f na $[a, b]$ platí: $(R) \int_a^b f = (\mathcal{L}) \int_a^b m_f, (R) \int_a^b f = (\mathcal{L}) \int_a^b M_f$

Navíc f je integrovatelná v Riemannově smyslu $\Leftrightarrow f$ je spojitá s. v. na $[a, b]$
(Tedy množina bodů nespojistosti funkce f v $[a, b]$ má Lebesgueovu míru nula.)

Věta 6.8: Je-li f R-integrovatelná na $[a, b]$, pak je také $\mathcal{L}$ -integrovatelná na $[a, b]$ a platí: $(\mathcal{L}) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$
(Tedy Lebesgueův integrál je skutečným rozšířením Riemannova integrálu.)

Důsledek 6.9: Každá spojitá funkce na $[a, b]$ je $\mathcal{L}$ -integrovatelná na $[a, b]$ a $(\mathcal{L}) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$
Každá monotonní funkce na $[a, b]$ je $\mathcal{L}$ -integrovatelná na $[a, b]$ a $(\mathcal{L}) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$

Poznámka 6.9 . A: Zejména lze pro výpočet Lebesgueova integrálu z funkce, která je R-integrovatelná, použít metody pro výpočet Riemannova integrálu: Newton-Leibnizův vzorec, metoda per-partés, substituce. . .

Věta 6.10: *Luzinova*

Bud' $A \in \mathcal{L}, \lambda(A) < \infty$. Konečná reálná funkce f na A je $\mathcal{L}$ -měřitelná $\Leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0 \exists$ uzavřená množina $F \subseteq A$ taková, že $\lambda(A - F) < \epsilon$ a $f|_F$ je spojitá v každém bodě $x \in F$.

Tedy f se liší od spojitě funkce velmi málo.

7 Součin měr a Fubiniova věta

Fubiniova věta převádí integraci v $\mathbb{R}^n$ na integraci ve dvou prostorech $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l$, kde $k + l = n$.

Proto je nutné porozumět vztahu mezi Lebesgueovou mírou $\lambda_n \dots$ n -rozměrná Lebesgueova míra, a příslušnými k či l rozměrnými Lebesgueovými mírami.

Hlavní otázky:

- Co je to součin měr: $\lambda_k \otimes \lambda_l$?
- Je $\lambda_n = \lambda_k \otimes \lambda_l$?
- Jak souvisí $\int_A f d\lambda_n$ s $\int_A f d\lambda_k, \int_A f d\lambda_l$?

Tyto otázky prostudujeme pro obecné míry a abstraktní integrály.

- Carathéodoryho věta o rozšíření (V 2.6, V 2.11)
- Věta o jednoznačnosti rozšíření (V 2.12)
- Lebesgueova věta o monotónním limitním přechodu (V 5.22)

Bud' $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ měřitelné prostory. Kartézský součin $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ pro $A \subseteq X, B \subseteq Y$ je zřejmě $A \times B \subseteq X \times Y$.

Def 7.1: Pro $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$ nazýváme $A \times B$ **měřitelným obdélníkem**.

σ -algebru generovanou systémem všech měřitelných obdélníků značíme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$

Poznámka: Tato σ -algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ není kartézským součinem $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$

$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je nejmenší σ -algebra, která obsahuje všechny měřitelné obdélníky $A \times B$

Bud' $M \subseteq X \times Y$ libovolná množina a $x \in X, y \in Y$ pevně zvolené body.

$M_x = \{y \in Y \mid [x, y] \in M\} \subseteq Y$ (x-)řez množiny M v bodě $x \in X$

$M_y = \{x \in X \mid [x, y] \in M\} \subseteq X$ (y-)řez množiny M v bodě $y \in Y$

Bud' f funkce definovaná na $X \times Y$. $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*, x \in X, y \in Y$ zvolené body. Definujme funkce:

$f_x : Y \rightarrow \mathbb{R}^* \quad f_x(y) = f(x, y)$ x-řez funkce f ... tedy $f_x = f(x, \cdot)$

$f_y : X \rightarrow \mathbb{R}^* \quad f_y(x) = f(x, y)$ y-řez funkce f ... tedy $f_y = f(\cdot, y)$

Lemma 7.2: Bud' $M \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Pak pro $\forall x \in X, \forall y \in Y$ je $M_x \in \mathcal{N}, M_y \in \mathcal{M}$.

Řez množinou zachovává měřitelnost množin.

Měřitelná funkce $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$ vrací měřitelné množiny v $X \times Y$ z měřitelných množin v $\mathbb{R}^*$.

Tedy f je měřitelná na σ -algebře $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, pokud jsou vzory lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}$ prvky σ -algebry $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Def: Řekneme, že funkce f je **měřitelná** na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, jestliže $\forall L \in \mathcal{L}$ je $f^{-1}(L) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Def: Řekneme, že funkce f_x je **měřitelná** na $\mathcal{N}$, jestliže $\forall L \in \mathcal{L}$ je $(f_x)^{-1}(L) \in \mathcal{N}$

Řekneme, že funkce f_y je **měřitelná** na $\mathcal{M}$, jestliže $\forall L \in \mathcal{L}$ je $(f_y)^{-1}(L) \in \mathcal{M}$

Lemma 7.3: Necht' f je měřitelná funkce na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, x \in X, y \in Y$ zvolené body.

Pak je funkce f_x měřitelná na $\mathcal{N}$ a f_y měřitelná na $\mathcal{M}$.

Cílem je na σ -algebře $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ sestavit míru (označme ji $\mu \otimes \nu$), pro kterou bude $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, pro $\forall$ měřitelný obdélník $A \times B$.

Prvky v $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ jsou ale mnohem komplikovanější, než jen měřitelné obdélníky $A \times B$ (například kruhy).

Není proto úplně zřejmé, jak míru $\mu \times \nu$ definovat.

Bud' pro začátek $\mathcal{K}$ systém všech podmnožin množiny $X \times Y$, které jsou konečným sjednocením měřitelných obdélníků. Tj. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Lemma 7.4: Systém $\mathcal{K}$ je algebra na $X \times Y$.

Tj. $\mathcal{K}$ je uzavřený na komplementy a konečná sjednocení.

Na systému $\mathcal{K}$ lze definovat (pra)míru $\mu \otimes \nu$ splňující $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$

Tuto (pra)míru pak rozšíříme Carathéodoryho konstrukcí na míru na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Věta 7.5: Existuje míra $\mu \otimes \nu$ definovaná na σ -algebře $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ taková, že:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \text{ pro } \forall A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$$

Jsou-li navíc obě míry μ, ν σ -konečné, pak je míra $\mu \otimes \nu$ také σ -konečná a je určena jednoznačně.

Intermezzo o monotónních systémech množin

Def 7.6: Systém $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ se nazývá **monotónní systém** podmnožin v X , pokud je uzavřený na spočetná neklesající sjednocení a spočetné nerostoucí průniky. Tj.

$$A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$$

$$A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$$

Poznámka 7.6. A: Každá σ -algebra je monotónním systémem.

Průnik monotónních systémů je také monotónní systém

$\Rightarrow \exists$ nejmenší monotónní systém obsahující daný generující systém množin $\mathcal{S} \subseteq 2^X$

Označme tento nejmenší monotónní systém jako $\mathcal{S}_m$.

Protože je σ -algebra $\mathcal{S}_\sigma$ generovaná systémem $\mathcal{S}$ také monotónní systém $\Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_\sigma$

Lemma 7.7: Je-li výchozí systém $\mathcal{S}$ algebrou, pak je $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\sigma$.

tj. nejmenší monotónní systém obsahující $\mathcal{S}$ je současně σ -algebrou obsahující $\mathcal{S}$.

Důsledek 7.8: Pokud je $\mathcal{M}$ monotónní systém a $\mathcal{M}$ obsahuje nějakou algebru $\mathcal{S}$, pak $\mathcal{M}$ obsahuje i σ -algebru generovanou $\mathcal{S}$.

tj. $\mathcal{S}$ algebra, $\mathcal{M}$ monotónní systém, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{S}_\sigma \subseteq \mathcal{M}$

Věta 7.9: Necht' $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory s mírou, přičemž μ, ν jsou σ -konečné.

Bud' $M \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ a definujme funkce:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^* \quad f(x) = \nu(M_x)$$

$$g : Y \rightarrow \mathbb{R}^* \quad g(y) = \mu(M_y)$$

Pak je f měřitelná na $\mathcal{M}$, g je měřitelná na $\mathcal{N}$ a platí $\int_X f d\mu = (\mu \otimes \nu)(M) = \int_Y g d\nu$

Def: Řekneme, že funkce f je **polospojité zdola** v x_0 , jestliže $m_f(x_0) = f(x_0)$

Řekneme, že funkce f je **polospojité shora** v x_0 , jestliže $M_f(x_0) = f(x_0)$

Tvrzení: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \Leftrightarrow f$ je polospojité zdola i shora.

Věta 7.10: Necht' $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ -konečnou mírou. Pak existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na σ -algebře $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ taková, že pro každý měřitelný obdélník $A \times B \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ platí:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Obecněji pro libovolnou množinu $M \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ je $(\mu \otimes \nu)(M) = \int_X \nu(M_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(M_y) d\nu(y)$

Poznámka: Výpočet objemu tělesa pomocí metody řezů - Cavalieriho princip

Poznámka: Teorii integrace v kartézských součinech se věnoval Fubini, jeho nepřesnosti dotáhnul Tonelli

Věta 7.11: Tonelliho

Necht' $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ -konečnou mírou.

Necht' je funkce $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$ nezáporná a $\mu \otimes \nu$ měřitelná. Potom platí:

- 1) Funkce $f_x = f(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbb{R}^*$ je nezáporná a ν -měřitelná $\forall x \in X$.
- 2) Funkce $g : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ definovaná jako $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) (= \int_Y f_x d\nu)$ je nezáporná a μ -měřitelná.
- 3) Platí rovnost: $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X g d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Věta 7.12: Fubiniova

Necht' $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ jsou prostory se σ -konečnou mírou.

Necht' je funkce $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$, $\mu \otimes \nu$ integrovatelná. Potom platí:

- 1) Funkce $f_x = f(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbb{R}^*$ je ν -integrovatelná pro s.v. $x \in X$.
- 2) Funkce $g : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ definovaná jako $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ je μ -integrovatelná.
- 3) Platí vzorec: $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X g d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Situace v $\mathbb{R}^n$

Necht' $n = k + l$, kde $n, k, l \in \mathbb{N}$. Uvažme prostory lebesgueovsky měřitelných množin:

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n), (\mathbb{R}^k, \mathcal{L}_k, \lambda_k), (\mathbb{R}^l, \mathcal{L}_l, \lambda_l)$ a $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_l, \lambda_k \otimes \lambda_l)$, kde $(\forall i \in \{n, k, l\})$

- λ_i je i -rozměrná Lebesgueova míra
- $\mathcal{L}_i$ je σ -algebra lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^i$ vzhledem k Lebesgueově míře λ_i
- $\mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_l$ je σ -algebra z Def 7.1 - je to σ -algebra generovaná konečným sjednocením měřitelných obdélníků
- $\lambda_k \otimes \lambda_l$ je součinná míra na $\mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_l$ z Věty 7.5.

Běžně ztotožňujeme $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$

Otázky: Je $\mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_l = \mathcal{L}_n$?

NE

Je $\lambda_k \otimes \lambda_l = \lambda_n$?

NE

Věta 7.13: Necht' $n = k + l$, Lebesgueova míra λ_n je zúplněním součinné míry $\lambda_k \otimes \lambda_l$ tj. $\lambda_n = \overline{\lambda_k \otimes \lambda_l}$ neboli $\mathcal{L}_n = \overline{\mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_l}$ ve značení věty 1.11

Integrál vzhledem k míře $\lambda_k \otimes \lambda_l$ a vzhledem k míře λ_n je stejný (jakožto hodnota), neboť $\lambda_n = \overline{\lambda_k \otimes \lambda_l}$ a abstraktní integrál nezávisí na hodnotách integrované funkce na množině míry nula.

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l} f d(\lambda_k \otimes \lambda_l) = \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l} f d(\overline{\lambda_k \otimes \lambda_l}) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$$

Věta 7.14: Tonelliho v $\mathbb{R}^n$

Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ je nezáporná a měřitelná funkce (vzhledem k míře λ_n). Potom pro $n = k + l$ platí:

- 1) Funkce $f_x = f(x, \cdot) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^*$ je nezáporná a měřitelná (vzhledem k míře λ_l) pro s.v. $x \in X$.
- 2) Funkce $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^*$ definovaná jako $g(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) d\lambda_l(y)$ je nezáporná a λ_k -měřitelná.

- 3) Platí rovnost: $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^k} g d\lambda_k = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) d\lambda_l(y) \right) d\lambda_k(x)$

Věta 7.15: Fubiniova

Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ je integrovatelná funkce (vzhledem k míře λ_n). Potom pro $n = k + l$ platí:

- 1) Funkce $f_x = f(x, \cdot) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^*$ je integrovatelná (vzhledem k míře λ_l) pro s.v. $x \in X$.
- 2) Funkce $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^*$ definovaná jako $g(x) = \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) d\lambda_l(y)$ integrovatelná (vzhledem k míře λ_k).

- 3) Platí vzorec: $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^k} g d\lambda_k = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) d\lambda_l(y) \right) d\lambda_k(x)$