

8. Kvadratické funkce, rovnice a nerovnice - úlohy k procvičení

1. Odvoďte vzorec pro výpočet kořenů $x_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Proveďte diskusi o řešitelnosti této rovnice v $\mathbb{R}$, tzn. uveďte počet a tvar kořenů této rovnice v závislosti na hodnotách koeficientů a, b, c .

2. Najděte polynom, který je nejmenším společným násobkem polynomů

$$x^2 - x - 2, \quad 2x^2 + 3x + 1, \quad x^2 - 3x - 4.$$

3. Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnice

a)

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = \sqrt{3(x-1)},$$

b)

$$\frac{18x+7}{x^3-1} = \frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1},$$

c)

$$2\sqrt{8x^2-26x+16} - 1 = \frac{5-4\sqrt{8x^2-26x+16}}{\sqrt{8x^2-26x+16}},$$

d)

$$\sqrt{x^2-5x+6} = \sqrt[8]{9x-10-2x^2},$$

e)

$$|x-x^2-1| = |2x-3-x^2|.$$

4. Vyřešte v $\mathbb{C}$ rovnice

a)

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 9 = 0,$$

b)

$$2x^2 - ix + 1 = 0.$$

5. Vyřešte v $\mathbb{R}$ nerovnice

a)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{1}{2-x},$$

b)

$$2x+1 > \sqrt{x^2+3x+3},$$

c)

$$|x+2| + \frac{|2x-1|}{|x-3|} \leq 2.$$

6. Určete definiční obory funkcí

a)

$$f: y = \sqrt{\frac{-2}{x^2-5x+6}},$$

b)

$$g: y = \log(x^2-10) + \sqrt{x^2-5x}.$$

7. Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnice s parametrem $p \in \mathbb{R}$

a)

$$(p-2)x^2 - (p^2 - 2p + 2)x + 2p = 0,$$

b)

$$\frac{1}{x-2p} + \frac{2x}{p(x+p)} = \frac{4x-p+6}{p(x+p)(x-2p)}.$$

8. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je nerovnost

$$(1-a^2)x^2 + (1-a)x - 2 < 0$$

splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

9. Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice

$$x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 = 0$$

o neznámé $x \in \mathbb{R}$ dva kořeny opačných znamének.

10. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro které bude mít rovnice

$$(2p+2)x^2 - (3p-4)x + p + 2 = 0$$

o neznámé x právě dva reálné záporné kořeny.

11. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro které bude mít rovnice

$$(p^2-1)x^2 - (1-p^2)x + p^2 - p - 2 = 0$$

o neznámé x dva různé kořeny vyhovující vztahu $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

12. Nechť x_1, x_2 značí kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Pouze pomocí koeficientů a, b, c vyjádřete výrazy

a)

$$x_1^3 - x_2^3,$$

b)

$$\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}\right)^2.$$

13. Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$x^2 + ax + b = (c+x)^2,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

14. Načrtněte graf funkce

$$f: y = 2x^2 + 4x + 2,$$

vyznačte v něm důležité body a určete jeho průsečíky se souřadnicovými osami. Dále najděte rovnice všech takových tečen kuželosečky, která je grafem funkce f , které jsou kolmé k přímce $p: x + 8y + 1 = 0$.

15. Načrtněte graf funkce

$$f: y = x^2 - 6x + 5,$$

vyznačte v něm důležité body a určete jeho průsečíky se souřadnicovými osami. Dále vypočtete obsah trojúhelníku, který je vymezen tečnou a normálou ke grafu funkce f v bodě $T = [3, y_0]$ (bod T leží na grafu funkce f) a osou x .

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 59, zejména úlohy č. 28, 32, 85 - 91, 126 b, d, 133, 134, dále úlohy č. 128 - 130 na str. 120, konečně úlohy od str. 183, zejména 63 - 65.