

7. Absolutní hodnota - úlohy k procvičení

1. Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ platí $|a| : |b| = |a : b|$.
2. Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí $|a| + |b| \geq |a - b| \geq ||a| - |b||$.
3. Rozhodněte, zda pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ je číslo

$$2 - \frac{2k - 15i}{2k - 5i}$$

komplexní jednotkou. Své tvrzení podložte výpočtem.

4. Zjednodušte předpis funkce

$$f : y = \frac{x^2 + |x|}{|x| + 1},$$

dále načrtněte její graf a určete všechny její body

- a) nespojitosti,
- b) ve kterých nemá derivaci.

5. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

a)

$$|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9,$$

b)

$$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1,$$

c)

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 6 - x,$$

d)

$$9^{|3x-1|} = 3^{8x-2},$$

e)

$$4 - |\log x| = 3\sqrt{\log x},$$

f)

$$2 \cos^2 x - 3 |\cos x| + 1 = 0,$$

g)

$$|\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

6. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

a)

$$\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2,$$

b)

$$\frac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{4 - x^3}} \geq 0,$$

c)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{|x|}} \leq 1,$$

d)

$$|x|^{2x^2 - 5x + 2} > 1.$$

e)

$$\log \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0,$$

f)

$$\left| 2 \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

g)

$$|\cos x| < |\sin x|,$$

h)

$$\left| \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \right| \leq 2.$$

7. V $\mathbb{R}^2$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} |x-1| + y &= 0, \\ 2x - y &= 0. \end{aligned}$$

8. Znázorněte v kartézské soustavě souřadnic množinu $C = A \cap B$, jestliže

a)

$$\begin{aligned} A &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 4x + 3y \leq 12\} \\ B &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, |y| \leq 2\} \end{aligned} ,$$

b)

$$\begin{aligned} A &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, xy \leq 2\} \\ B &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq 1\} \end{aligned} .$$

9. Najděte nejmenší číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující podmínky

$$\left| \sin \frac{2x}{3} \right| = 1 \quad \wedge \quad x > 8\pi \quad \wedge \quad \cotg x > 0.$$

10. Načrtněte grafy funkcí daných následujícími předpisy, vyznačte v nich důležité body a určete jejich vlastnosti

a)

$$y = |x-3| + 3|x-1| - 2x - 1,$$

b)

$$y = |x^2 - 4|x| + 3|,$$

c)

$$y = \frac{|2x+1|}{x-1},$$

d)

$$y = 2^{|2x+4|} - 1,$$

e)

$$y = \log_{\frac{1}{4}} |3-x| + 2,$$

f)

$$y = -2 \cos \left| x + \frac{\pi}{2} \right|,$$

g)

$$y = \operatorname{tg} \left| \frac{x}{2} \right| - \frac{\pi}{2}.$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 125, zejména úlohy č. 156, 164, 171 - 173, 175 - 179, 181, 182, 184 - 190.