

6. Kartézský součin, relace, zobrazení - úlohy k procvičení

1. Dokažte, že osová souměrnost je

- bijektivní zobrazení $\mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$,
- shodné zobrazení,
- involutorní zobrazení.

2. Nechť A, B, C jsou množiny. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad vyvracející jejich obecnou platnost.

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
- $(A \div B) \times C = [C \times (A - B)] \cup [C \times (B - A)]$;
- $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

Pokud je to možné, znázorněte situaci pomocí Vennových diagramů.

3. Rozhodněte, zda je předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \geq 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

definováno zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Pokud se jedná dokonce o funkci, rozhodněte, zda má v bodě $x = 0$ derivaci. Svá tvrzení zdůvodněte.

4. Rozhodněte, zda je následujícím předpisem definováno zobrazení z množiny A do množiny B , resp. množiny A do množiny B (tj. $A \rightarrow B$), resp. z množiny A na množinu B , resp. množiny A na množinu B

- $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}, f(x) = |x|$;
- $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}, f(x) = (2x^2 - 3)/(3x^2 - 2)$;
- $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(x) = [(x + 1)/2]$, kde $[x]$ značí celou část čísla x , tj. nejvyšší celé číslo, které nepřevyšuje číslo x .

5. Udejte příklad takových množin A, B , aby

- množina $A \times P(B)$, kde $P(B)$ značí množinu všech podmnožin množiny B , měla právě 40 prvků;
- počet všech zobrazení $A \rightarrow B$ byl roven 243.

Případně vysvětlíte, proč takové množiny, resp. zobrazení neexistují.

6. Udejte příklad takového zobrazení $f: A \rightarrow B$, aby

- f bylo injektivní a nebylo surjektivní, přičemž $A = \{n; n \in \mathbb{N}, 2 \mid n\}$ a $B = \{n; n \in \mathbb{N}, 4 \mid n\}$;
- f bylo surjektivní a nebylo injektivní, přičemž $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{N}$;
- f bylo bijektivní, přičemž $A = \mathbb{Z}$ a $B = \{n; n \in \mathbb{N}, 4 \mid n\}$;
- f bylo injektivní a nebylo surjektivní, přičemž $A = \mathbb{Z}$ a $B = P(\mathbb{N})$;
- f bylo surjektivní, přičemž $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $B = \mathbb{Z}$.

Případně vysvětlíte, proč takové zobrazení neexistuje.

7. Udejte příklad injektivního zobrazení $f : A \times A \rightarrow P(A)$, je-li

- a) $A = \{a, b\}$,
- b) $A = \{a, b, c\}$.

Případně vysvětlíte, proč takové zobrazení neexistuje.

8. Nechť $A = \{a, b\}$. Udejte příklad zobrazení $f : (A \rightarrow A) \rightarrow P(A)$, ke kterému neexistuje inverzní zobrazení.

9. Výčtem prvků zadejte množinu B^A všech zobrazení $f : A \rightarrow B$ a množinu A^B všech zobrazení $g : B \rightarrow A$, je-li $A = \{a\}$ a $B = \{x, y, z\}$.

10. Rozhodněte, zda dané zobrazení je injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní

- a) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f((x, y)) = x + y$,
- b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = (2x, 2x + 1)$,
- c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$, $f((x, y)) = \{x, y\}$.

Své tvrzení zdůvodněte.

11. Nechť ρ je relace mezi množinami $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$, definovaná:

$$\rho = \{(x; 2x^2 + 3) \mid \text{pro } \forall x \in \mathbb{Z}\},$$

resp. σ je relace mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, definovaná:

$$\sigma = \{(a; b) \mid b = -2a \vee b = a - 1, \text{ pro } \forall a \in \mathbb{N}\}.$$

Rozhodněte, zda je některá z relací ρ nebo σ zobrazením. Svě tvrzení zdůvodněte. Dále popište relaci $\sigma \circ \rho$ a relaci $\rho \circ \sigma$ a uveďte mezi jakými množinami jsou definovány.

12. Nechť A je konečná n -prvková množina a B je konečná s -prvková množina. Určete počet všech

- a) injektivních zobrazení $A \rightarrow B$,
- b) bijektivních zobrazení $A \rightarrow B$.

13. Uveďte, co všechno lze říci o počtu prvků konečné n -prvkové množiny M , jestliže existuje surjektivní zobrazení $P(M) \rightarrow M \times M$. Svě tvrzení zdůvodněte.

14. Udejte příklad neidentických zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takových, že $f \neq g$ a $f \circ g = g \circ f$.

15. Nechť M je konečná n -prvková množina. Zdůvodněte, kolik lze mezi množinami $M \times M$ a $P(M)$ definovat různých relací. ($P(M)$ značí počet všech podmnožin množiny M .)

16. Nechť $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ jsou zobrazení. Dokažte, že platí následující tvrzení.

- a) Jestliže f a g jsou surjektivní, pak $g \circ f$ je surjektivní.
- b) Jestliže $g \circ f$ je injektivní, pak f je injektivní.

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 381, zejména úlohy č. 235, 238, 239, 241 - 243, 245, 256, 258, 259, 263 - 267, 275 - 280, 377 - 380, 384 - 386, 388 - 392, 394, 395, 399 - 401.