

5. Množiny, výroky - úlohy k procvičení

1. Zformulujte a dokažte tvrzení

- a) označovaná jako tzv. de Morganova pravidla,
- b) o negaci implikace výroků A a B (tj. větu, která popisuje tvar výroku, který je negací výroku $A \Rightarrow B$).

2. Najděte všechna $k \in \mathbb{Z}$, pro něž platí $\emptyset \neq A \cap B \neq A$, jestliže $A = (3; 8)$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < k\}$.

3. Zjednodušte

$$\{[(A \div B) \cup C] \cap [(B \cup C) - (A \cap B)]'\} - (A \cap C)'_{A \cup C}.$$

4. Označme

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \equiv I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n \cap \dots \quad \text{a} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \equiv I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \cup \dots.$$

Dokažte, že pro následující intervaly reálných čísel platí

a)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right) = (1; 2),$$

b)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right) = (0; 3),$$

c)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}; 2 + \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right),$$

d)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}; 2 + \frac{n}{n+1}\right) = (0; 3).$$

5. Nechť A je konečná n prvková množina ($n \in \mathbb{N}_0$). Vypočítejte počet všech podmnožin množiny A . Svě tvrzení zdůvodněte.

6. Nechť $P(A)$ značí množinu všech podmnožin množiny A . Dokažte,

- a) že platí $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$,
- b) že platí $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$,
- c) že obecně neplatí $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$.

7. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$. Najděte všechny prvky X množiny $P(A)$, pro které platí

- a) $X \cap \{a, b, d\} = \{a, d\}$,
- b) $X \cup \{a, b, d\} = \{a, d\}$.

8. Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda platí

$$(C - B) \cap (A \cup B) = (A \cap B)'_A.$$

V případě, že rovnost platí, proveďte její korektní důkaz. V případě, že rovnost neplatí

- a) uveďte konkrétní příklad množin, pro něž tato rovnost neplatí,
- b) zdůvodněte, zda je místo symbolu $=$ možné použít vhodný symbol množinové inkluze ($\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$) tak, aby uvedený zápis byl pravdivý. Svě tvrzení dokažte korektním množinovým důkazem.

9. Logická spojka $|$, definovaná následující tabulkou pravdivostních hodnot

A	B	$A B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

se nazývá *Shefferův symbol*. Dokažte, že pomocí Shefferova symbolu lze vyjádřit každou z logických spojek $'$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

10. Rozhodněte, zda je následující výroková forma tautologií

$$(A \vee A')' \Rightarrow \{[A' \wedge (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [B \vee C']\}.$$

11. Rozhodněte o pravdivosti následující výrokové formy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a znegujte ji.

Číslo n je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi.

12. Rozhodněte o pravdivosti následujícího výroku a znegujte jej.

Každý čtyřúhelník, který má alespoň tři vnitřní úhly pravé, má všechny vnitřní úhly pravé.

13. Okolo gymnázia jezdí tři tramvajové linky. Linkou číslo 5 jezdí 55, linkou číslo 3 jezdí 65 a linkou číslo 11 jezdí 135 studentů. Žádnou z těchto linek nepoužívá 80 studentů, všechny tři linky využívá jediný student. Linkou 3 a 11 jezdí současně 40 studentů, Linkou 3 i 5 jezdí 5 studentů, linkou 5 nebo 11 jezdí 155 studentů. Určete kolik studentů navštěvuje gymnázium? Kolik studentů používá právě 2 uvedené tramvajové linky? Kolik studentů jezdí pouze linkou číslo 11?

14. Jsou dány výrokové formy

A : Součet $a + b$ je záporný.

B : Alespoň jedno z čísel a, b je záporné.

Napište implikaci $A \Rightarrow B$, její obrácení, obměnu a negaci. (Pro zkrácení zápisu můžete místo slovních formulací užít i matematické symboliky.) Rozhodněte, zda pro $\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí ekvivalence $A \Leftrightarrow B$. Svě tvrzení zdůvodněte.

15. V právě jedné ze tří skříněk, zlaté, stříbrné a dřevěné, jsou šperky. Skříňky vyrobili umělci A a B . Umělec A zásadně umisťuje na své výrobky pravdivé nápisy, B vždy lživé. Na skřínkách jsou tyto nápisy:

- zlatá: „Šperky jsou v této skřínce.“
- stříbrná: „Šperky nejsou v dřevěné skřínce.“
- dřevěná: „Šperky jsou ve zlaté skřínce.“

Najděte všechna řešení, tj. určete, který umělec zhotovil kterou skříňku, a zjistěte, kde jsou šperky. Svě tvrzení zdůvodněte.

16. Následující úloha se odehrává na ostrově POctivců, PAdouchů a NOrmálních lidí, kde PO vždy mluví pravdu, PA vždy lžou a NO někdy lžou a někdy mluví pravdu. PA zde přitom tvoří nejnižší kastu, NO střední kastu a PO kastu nejvyšší. Uvažme takové tři obyvatele A, B a C z tohoto ostrova, z nichž právě jeden je PO, právě jeden je PA a právě jeden je NO. A a B řeknou:

A : B je z vyšší kasty než C .

B : C je z vyšší kasty než A .

Najděte všechna řešení této úlohy, tj. určete povahy A, B a C . Dá se rozhodnout, co by C odpověděl na otázku: „Kdo je z vyšší kasty, A nebo B ?“ Svá tvrzení zdůvodněte!

17. Následující úloha se odehrává na ostrově POctivců, PAdouchů a NOrmálních lidí, kde PO vždy mluví pravdu, PA vždy lžou a NO někdy lžou a někdy mluví pravdu. Uvažme takové tři obyvatele A, B a C z tohoto ostrova, z nichž právě jeden je PO, právě jeden je PA a právě jeden je NO. A, B a C řeknou:

A : Já jsem NO.

B : To je pravda.

C : Já nejsem NO.

Určete povahy A, B a C . Najděte všechna řešení této úlohy. Svá tvrzení zdůvodněte!