

4. Výrazy, mocniny, odmocniny - úlohy k procvičení

1. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí

$$f_1(x) = \frac{1}{|x|^4}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^5}, \quad f_3(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{a} \quad f_4(x) = x^3,$$

vyznačte v nich důležité body a určete jejich vlastnosti (definiční obor, obor hodnot, monotonii, extrémy, paritu). Dále rozhodněte, zda existují inverzní funkce f_1^{-1} , f_2^{-1} , f_3^{-1} a f_4^{-1} k funkcím f_1 , f_2 , f_3 a f_4 . Své tvrzení zdůvodněte. Pokud ano, načrtněte rovněž jejich grafy.

2. Graficky vyřešte nerovnice

$$\frac{1}{x^4} > -\frac{1}{x^3},$$
$$\sqrt[4]{x} \leq \sqrt[3]{|x|}.$$

3. Načrtněte grafy funkcí a vyznačte v nich důležité body

a)

$$f_1(x) = -2\sqrt{|3-x|},$$

b)

$$f_2(x) = 3 - \frac{2}{(x+1)^3},$$

c)

$$f_3(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1.$$

+ b log x = h y

4. Zjednodušte výraz

$$V(a) = 8a + 5 + \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16}$$

a najděte všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro něž výraz $V(a)$ není kladný.

5. Zjednodušte výraz

$$V = \left[\frac{(3a-1)^3}{(2b-1)^2} + \frac{(3a-1)^2}{2b-1} + 3a + 2b - 2 \right] : \left[\frac{(3a-1)^4}{(2b-1)^2} - (2b-1)^2 \right].$$

6. Zjednodušte výraz

$$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}.$$

7. Zjednodušte výraz

$$\left[\sqrt{(x^2-1)(2-x^2)} + \frac{\sqrt{x^6-3x^4+3x^2-1}}{\sqrt{2-x^2}} \right] : \left[\frac{1}{1+\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2-x^2} \right].$$

8. Vypočtěte

$$3^{\log_8 \sqrt{2}} \cdot 3^{\log_8 \sqrt[4]{2}} \cdot 3^{\log_8 \sqrt[8]{2}} \cdot \dots \cdot 3^{\log_8 \sqrt[2^n]{2}} \cdot \dots$$

9. Vypočtěte

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[12]{5} \cdot \dots \cdot \sqrt[n^2+n]{5} \cdot \dots$$

10. Načrtněte graf funkce

$$f(x) = \frac{-2x - 2}{|x + 2|}$$

a vyznačte v něm důležité body včetně průsečíků se souřadnicovými osami.

11. Nechť je dána funkce

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}.$$

Zjednodušte její předpis, určete její definiční obor a obor hodnot a načrtněte její graf.

12. Nechť je dán výraz

$$V(x) = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 2 \cdot \sqrt{x} \right)^n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

a) Pro $n = 15$ určete absolutní člen (tj. člen, který neobsahuje x) výrazu V .

b) Pro která n má třetí člen rozvoje výrazu V koeficient u proměnné x větší než člen předchozí i následující.

13. Určete hodnotu výrazu

$$V(x) = \frac{r^3 + rs + s^3}{r^2 - 3rs + s^2},$$

kde r, s značí kořeny rovnice $5x^2 - 6x + 5 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 151, zejména úlohy č. 16, 17, 18, 67, 72 - 80, 91, 112, 114 - 120.