

3. Komplexní čísla - úlohy k procvičení

1. Dokažte tzv. *Moirveovu* větu.
2. Dokažte, že *součin komplexních čísel* z_1 a z_2 je komutativní.
3. Dokažte, že množinu $\mathbb{R}$ lze chápat jako podmnožinu množiny $\mathbb{C}$.
4. Číslo

$$z = \frac{-4 \cdot (\sqrt{3} - i)^8}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot (2 + 2\sqrt{3}i)^4}$$

vyjádřete v algebraickém i goniometrickém tvaru.

5. Nechť $z_1 = -3 + 4i$.
 - a) Číslo z_1 znázorněte v Gaussově rovině a vypočtěte $|z_1|$.
 - b) Vypočtěte $\sqrt{z_1}$ a výsledek vyjádřete v algebraickém tvaru.
 - c) Napište algebraickou rovnici s reálnými koeficienty nejmenšího možného stupně, která má kořen z_1 .
 - d) Napište reciprokou rovnici s reálnými koeficienty nejmenšího možného stupně, která má kořen z_1 .
6. Nechť zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je dané předpisem

$$f(z) = (-2\sqrt{3} + 2i)z - 2 + 3i.$$

Uvažujme přitom obrazy jednotlivých komplexních čísel v Gaussově rovině. Rozhodněte, zda f je podobné zobrazení. Pokud ano, vyjádřete f jako složení několika základních shodných zobrazení a stejnolehlosti (jednotlivá zobrazení jednoznačně určete). Situaci ilustруйте náčrtem v Gaussově rovině.

7. Nechť jsou dány rovnice

$$z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0, \tag{1}$$

$$6x^6 + x^5 + 5x^4 - 5x^2 - x - 6 = 0, \tag{2}$$

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i, \tag{3}$$

$$z^2 + (1 - i)z + 4i = 0. \tag{4}$$

- a) Aniž rovnici (1) (resp. (2), (3), (4)) začnete řešit, uveďte, co je možné tvrdit o počtu (v $\mathbb{C}$, resp. v $\mathbb{R}$) a základních vlastnostech jejich kořenů. Svá tvrzení zdůvodněte.
 - b) V $\mathbb{C}$ vyřešte rovnici (1) (resp. (2), (3), (4)).
 - c) Pomocí algebraických i goniometrických tvarů vypočtěte $z_1 \cdot z_2$, kde z_1 a z_2 značí kořeny rovnice (4).
8. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad vyvracející jejich obecnou platnost.
Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí
 - a) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$,
 - b) $\sin 4x = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x$.

9. V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla z , pro něž platí

- a) $|z - 5 - 2i| < |z - 3 - 2i| \leq 2$,
- b) $|z + 2 - 3i| - |z + 2 + 7i| = 6$,
- c) $|z + 4i| = |\operatorname{Im} z|$,
- d) $|z - 2i| = 2|z + i|$.

Pojmenujte útvar, který je množinou všech vyhovujících bodů a v náčrtu popište přesně jeho polohu.

10. Nechť pro $\varphi \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$ platí

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi.$$

Dokažte, že pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi.$$

11. Dokažte, že pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ takové, pro něž jsou následující výrazy definovány, platí

$$\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{1 - i \operatorname{tg} \varphi} \right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\varphi}{1 - i \operatorname{tg} n\varphi}.$$

12. Nechť $\alpha, \varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$. Pak platí

$$\sin \varphi + \sin (\varphi + \alpha) + \cdots + \sin (\varphi + n\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

a

$$\cos \varphi + \cos (\varphi + \alpha) + \cdots + \cos (\varphi + n\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Dokažte. Jak se tyto vzorce změní, pokud $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$?

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia

- od str. 228, zejména úlohy č. 63, 64, 66, 67, 73, 75, 78, 80, 91, 93 - 97, 100, 101, 105, 106, 109, 110, 112, 119, 121, 122
- od str. 87, zejména úlohy č. 237, 242, 244 - 246, 248, 251 - 256, 263 - **266**, 269 - 271, 275, 276. Úlohy uvedené v této odrážce zahrnují rovnice v $\mathbb{C}$. Pozornost doporučuji věnovat hlavně úloze č. 266. Pokud máte pocit, že Vám řešení těchto rovnic nečiní potíže a nepotřebujete je tedy procvičovat, nemusíte tyto úlohy řešit.