

30. Neurčitý a určitý integrál - úlohy k procvičení

1. Definujte *neurčitý integrál* funkce f .
2. Objasněte princip konstrukce *Riemannova integrálu* funkce f a udejte příklad podmínky, která je
 - a) nutná a není dostatečná,
 - b) dostatečná a není nutná

k tomu, aby funkce f byla riemannovsky integrovatelná.

3. Udejte příklad
 - a) ohraničené funkce F , která na $\langle 1; 3 \rangle$ není primitivní funkcí k žádné funkci,
 - b) funkce f , pro jejíž dolní a horní Riemannovy integrály platí následující podmínky

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \quad \text{a} \quad \int_0^1 f(x) dx = 2,$$

- c) funkce g , k níž existuje funkce primitivní, ale tato primitivní funkce není funkcí elementární,
- d) ohraničené funkce h , která není riemannovsky integrovatelná na $\langle -1; 2 \rangle$.

Požadovanou funkci zadejte předpisem, případně zdůvodněte, proč žádná taková funkce neexistuje.

4. Vypočtete následující neurčité integrály

a)

$$\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx,$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx,$$

c)

$$\int \frac{3x + 1}{2x^2 + 1} dx,$$

d)

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x(1 + \sqrt{x+1})} dx,$$

e)

$$\int \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})^3} dx,$$

f)

$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos x + \cos^2 x} dx,$$

g)

$$\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx,$$

h)

$$\int \operatorname{arctg} 2x dx,$$

i)

$$\int e^{2x} \cos 2x \, dx.$$

5. Vypočtete následující určité integrály

a)

$$\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \, dx,$$

b)

$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}} \, dx,$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx,$$

d)

$$\int_0^1 \arcsin \frac{x}{2} \, dx,$$

6. Vypočtete obsah podgrafu funkce

$$f : y = x \ln x \quad \text{pro } x \in \langle 1; 3 \rangle,$$

tj. určete obsah plochy ohraničené grafem funkce f a přímkami o rovnicích $y = 0$, $x = 1$ a $x = 3$.

7. Vypočtete obsah plochy ohraničené

a) křivkami o rovnicích

$$y = \frac{2}{x-2} \quad \text{a} \quad y + x - 5 = 0,$$

b) křivkami o rovnicích

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{a} \quad y = x - 3,$$

c) křivkou, která je grafem funkce

$$f : y = x^2 + 2x + 4,$$

a jejími tečnami v bodech $T_1 = [0; 4]$ a $T_2 = [-3; 7]$.

8. Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy x křivky, která je grafem funkce

$$f : y = \sqrt{\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}} \quad \text{pro } x \in \langle 0; 1 \rangle.$$

9. Vypočtete délku křivky, která je grafem funkce

$$f : y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{pro } x \in \langle 1; e \rangle.$$

10. Vypočtete povrch pláště tělesa, které vznikne rotací kolem osy x křivky, která je grafem funkce

$$f : y = e^x \quad \text{pro } x \in \langle 0; 1 \rangle.$$

11. Užitím vhodných kritérií rozhodněte o konvergenci, resp. divergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad \text{a} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}.$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia. Obsah tohoto okruhu pokrývá především kapitola *Integrovní počet* od str. 314.