

2. Reálná čísla - úlohy k procvičení

1. Udejte konkrétní příklady čísel a a b tak, aby platilo

a) $a \in \mathbb{N}$ a $\sqrt{a} \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$,

b) $a \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$, $a + b \in \mathbb{N}$,

c) $a \notin \mathbb{R}$, $b \notin \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$,

d) $a \notin \mathbb{R}$, $\frac{1}{a} \notin \mathbb{R}$, $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$.

Případně zdůvodněte, proč požadované podmínky nelze splnit.

2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dokažte, že platí

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \quad (1)$$

Diskutujte, kdy ve vztahu (1) nastává rovnost.

3. Dokažte, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0. \quad (2)$$

Diskutujte, kdy ve vztahu (2) nastává rovnost.

4. Vyčíslete v $\mathbb{R}$ přesně $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$. Své tvrzení zdůvodněte. Dále dokažte, že $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \notin \mathbb{Q}$.

5. Dokažte, že $\log 2 \notin \mathbb{Q}$.

6. Porovnejte zlomky

$$\begin{array}{cc} \frac{111\,123\,456\,798}{334\,329\,876\,543} & \text{a} & \frac{111\,123\,456\,789}{334\,329\,876\,534} \\ \text{a} & & \\ \frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557} & \text{a} & \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669} \end{array}$$

Své tvrzení zdůvodněte.

7. Sestrojte úsečku délky $\sqrt{10}$ s využitím

a) Pythagorovy věty,

b) Eukleidovy věty.

8. Najděte všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro která platí, že

$$\frac{3 - \sqrt{2}a}{3 + \sqrt{2}a} \in \mathbb{Q}.$$

9. Nechť čísla $a, b \in \mathbb{R}^+$ splňují podmínku

$$\frac{a}{b} < \frac{a+3b}{a+b}.$$

Dokažte, že pak platí

$$\frac{a}{b} < \sqrt{3} < \frac{a+3b}{a+b}.$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia, od str. 104, zejména úlohy č. 22, 23, 24, 36, 39, 41, 85 - 93

65 67 69 70 71 72 73