

28. Průběh funkce - úlohy k procvičení

1. Definujte *asymptu bez směrnice* grafu funkce f .
2. Definujte skutečnost, že funkce f je v intervalu $(a; b)$ *konkávní*. Definujte *inflexní bod* funkce f .
3. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklady vyvracející jejich obecnou platnost.
 - a) Jestliže má funkce f v bodě x_0 inflexní bod, pak $f''(x_0) = 0$.
 - b) Jestliže je funkce f rostoucí na intervalu $(a; b)$, pak k ní na tomto intervalu existuje inverzní funkce f^{-1} , která je na $(a; b)$ rovněž rostoucí.
4. Do jednoho obrázku načrtněte grafy následujících funkcí

a)

$$f_1(x) = \log_5 x \quad \text{a} \quad f_2(x) = \log_3 x,$$

b)

$$g_1(x) = 3^x, \quad g_2(x) = 3^{x+1}, \quad g_3(x) = 3^x + 1 \quad \text{a} \quad g_4(x) = 3^{|x|},$$

c)

$$h_1(x) = (x+2)^2, \quad h_2(x) = (x+2)^3 \quad \text{a} \quad h_3(x) = (x+2)^{-2}.$$

5. Graficky řešte nerovnice

$$(-x)^{-2} < (-x)^{-3},$$

$$\log_4(-x) \geq \ln|x|.$$

6. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici

$$8^x = 17^x - 15^x.$$

7. Určete definiční obory následujících funkcí

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 3}{x - 2}} - 2 \arccos \frac{x}{2},$$

$$g(x) = \ln \frac{6 + x - x^2}{(x - 1)^2},$$

$$h(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{5}} x^2}.$$

8. Určete obory hodnot následujících funkcí

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x},$$

$$g(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

9. Definujte funkci $f(x) = \sin x$ a na základě její definice odvoďte její průběh a zdůvodněte její vlastnosti.
10. Nechť je dána funkce $f(x) = a^x$, kde $a > 1$ je pevně zvolené číslo. Na základě definice inverzní funkce odvoďte průběh funkce f^{-1} a zdůvodněte její vlastnosti. Grafy f i f^{-1} zakreslete do jednoho obrázku.

11. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

$$f_1 : y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1},$$

$$f_2 : y = \frac{x^3}{3 - x^2},$$

$$f_3 : y = \frac{\ln^2 x}{x},$$

$$f_4 : y = (x + 1) \cdot e^{-x^2},$$

to znamená

- určete její definiční obor, rozhodněte o její paritě a periodicitě, vypočtete její průsečíky se souřadnicovými osami, stanovte intervaly, v nichž je funkce f kladná, resp. záporná;
- určete intervaly monotonie a všechny lokální extrémy funkce f ;
- určete intervaly, v nichž je funkce f konvexní, resp. konkávní, a najděte všechny její inflexní body;
- určete všechny asymptoty bez směrnice i se směrnicí funkce f ;
- načrtněte graf funkce f , do kterého zakreslete veškeré získané informace o vlastnostech funkce f , dále určete obor hodnot funkce f a diskutujte o globalitě jejích extrémů.

Veškerá svá tvrzení podložte výpočty nebo zdůvodněte.

12. Zjednodušte předpis funkce

$$f : y = \frac{x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}$$

a poté vyšetřete její průběh ve smyslu předchozí úlohy.

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia. Obsah tohoto okruhu pokrývá především kapitola *Průběh funkce, maxima, minima* od str. 306.