

27. Derivace funkce - úlohy k procvičení

1. Definujte *derivaci* funkce f na množině M , $M \subseteq \mathbb{R}$.
2. Zformulujte tvrzení označované jako tzv. *L'Hospitalovo pravidlo*.
3. Uveďte předpoklady, při jejichž splnění platí

$$(f(x_0) - g(x_0))' = f'(x_0) - g'(x_0).$$

Uvedené tvrzení následně dokažte. Dále uveďte příklad ilustrující, že zmíněné předpoklady nelze vypustit.

4. Udejte příklad funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$f(-1) = 2, \quad f'_-(-1) = -\infty \quad \text{a} \quad f'_+(-1) = 3.$$

Požadovanou funkci zadejte předpisem, případně zdůvodněte, proč žádná taková funkce neexistuje.

5. Udejte příklad funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivaci pouze v bodě $x_0 = 3$ a v žádném jiném bodě její derivace neexistuje. Požadovanou funkci zadejte předpisem, případně zdůvodněte, proč žádná taková funkce neexistuje.
6. Udejte příklad funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou platí, že má nenulové všechny derivace v bodě $x_0 = 1$ až do n -tého řádu ($n \in \mathbb{N}$) a derivace všech vyšších řádů má v bodě $x_0 = 1$ již nulové. Požadovanou funkci zadejte předpisem, případně zdůvodněte, proč žádná taková funkce neexistuje.
7. Vypočtěte (první) derivace následujících funkcí a výsledky upravte do nejjednodušších možných tvarů.

$$f_1(x) = (2x)^x,$$

$$f_2(x) = x^3 e^x (\sin x - \cos x),$$

$$f_3(x) = 3 \sin^2 \left(4x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f_4(x) = \log \sqrt{\operatorname{tg} 3x}.$$

8. Rozhodněte, zda funkce

$$F(x) = -x \quad \text{a} \quad G(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

jsou primitivními funkcemi k téže funkci f na takové množině, kde jsou obě tyto funkce definovány. Pokud ano, najděte tuto funkci f .

9. Najděte obecné rovnice všech tečen funkce

$$f: y = \frac{x-1}{x+1},$$

které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x - y + 1 = 0$.

10. Najděte obecnou rovnici normály funkce

$$f: y = \cos^2 4x$$

v jejím bodě $T = \left[\frac{\pi}{16}, y_0\right]$ (tj. bod T leží na grafu funkce f).

11. Napište Maclaurinův polynom čtvrtého stupně pro funkci

$$f: y = x \arcsin x.$$

12. Napište Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$ pro funkci

$$f: y = \operatorname{tg} x.$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 297, zejména úlohy č. 46 - 50, 53, 54, 64 - 67, 74.