

26. Limity posloupností a funkcí - úlohy k procvičení

1. Definujte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -4$ a $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \infty$.
2. Následující tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost.
 - a) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 - b) Nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$. Pro součet s konvergentní nekonečné geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$ platí $s = \frac{a_1}{1-q}$.
 - c) Jestliže je funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak existuje její derivace v bodě x_0 . *ne $h=|x|$*
 - d) Jestliže existuje derivace funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak je funkce f v bodě x_0 spojitá. ✓
3. Udejte příklad funkcí $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ neexistuje} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty.$$

Požadované funkce zadejte předpisem, případně zdůvodněte, proč některá z nich nemůže existovat.

4. Z definice derivace odvoďte, že platí

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \frac{-4}{x^5}.$$

5. Jak je třeba dodefinovat v bodě $x_0 = 0$ funkci f , která je zadána předpisem

$$f: y = \frac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3},$$

aby v bodě $x_0 = 0$ byla spojitá.

6. Vypočtěte

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 2} - n \right), \quad 1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctg x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad 0$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}, \quad \frac{2}{\pi}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x} \right), \quad \left\| \frac{2}{e^4} \right\|$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4^n - 3 \cdot 3^n}{3^n - 4^{n+2}} + \frac{1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (4n - 3) - (4n - 1)}{\sqrt{n^2 + 2}} \right), \quad -\frac{2}{9}$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2}. \quad 0$$

7. Určete definiční obor, obor hodnot a body nespojitosti funkce f zadané předpisem

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x^{5n} - 3}$$

Handwritten notes: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{5n}$, $x \in (-1, 1)$, $x > 1$, $x = 1$, $x < -1$, body nespojitosti: $x = 1$, $\Delta(f) = (-1, 1)$

Svá tvrzení zdůvodněte.

8. Nekonečná spirála se skládá z polokružnic. Poloměr první polokružnice je 6 cm a poloměr každé další je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočtete délku spirály.

9. Nechť je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky a . Do tohoto trojúhelníku je vepsán kruh (o maximálním možném poloměru), do tohoto kruhu je opět vepsán rovnostranný trojúhelník (o maximální možné délce strany), atd. Vypočtete součet obvodů všech těchto kruhů (tzn. určete hodnotu nekonečného součtu $o_1 + o_2 + \dots + o_n + \dots$, kde o_n značí obvod n -tého vepsaného kruhu).

10. Vyšetřete všechny asymptoty (bez směrnice i se směrnicí) grafu funkce

$$f: y = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

Handwritten notes: $x > 0$, $y = 0$

Výpočet ilustrujte obrázkem, do něhož zakreslete všechny ty části grafu funkce f , které lze na základě provedených výpočtů určit.

11. Odvoďte tvar Maclaurinova polynomu obecného stupně funkce

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

a pomocí něj napište tvar nekonečné Maclaurinovy řady této funkce. S využitím výsledku zapište iracionální číslo $\ln 6$ jako součet nekonečně mnoha racionálních sčítanců.

12. Odvoďte tvar Maclaurinova polynomu dvanáctého stupně funkce

$$f(x) = e^{x^4}$$

(k tomu je výhodné odvodit Maclaurinův polynom funkce $f(z) = e^z$ a provést substituci $z = x^4$) a s jeho pomocí vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^4} - 1 - x^4}{x^8}$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia. Obsah tohoto okruhu pokrývají především kapitoly

- Posloupnosti - zejména části věnované limitám (od str. 243, hlavně úlohy č. 45 - 50) a nekonečným geometrickým řadám (od str. 261, hlavně úlohy č. 167 - 169, 171 - 173, 180 - 184, 189).
- Spojitost a limita funkce od str. 290, hlavně úlohy č. 16 - 18, 24.