

25. Posloupnosti a řady - úlohy k procvičení

1. Definujte *geometrickou* posloupnost, skutečnost, že posloupnost je *klesající* (v celém svém definičním oboru), *nekonečnou řadu*.
2. Zformulujte *srovnávací* a *odmocninové* kritérium konvergence nekonečné řady.
3. Udejte příklad posloupnosti a_n , která

- a) nemá limitu (pro $n \rightarrow \infty$) a jejíž obor hodnot je pěti prvková množina,
- b) rostoucí omezené posloupnosti a_n , pro kterou platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$,
- c) prosté posloupnosti, jejímž oborem hodnot je množina $\mathbb{Z}$.

Požadovanou posloupnost zadejte vzorcem pro n -tý člen, případně zdůvodněte, proč taková posloupnost neexistuje.

4. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž je neklesající posloupnost, která je určena vzorcem pro n -tý člen

$$a_n = \frac{n^2 x}{n+1}.$$

5. Užitím vhodných kritérií rozhodněte o konvergenci, resp. divergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{3n+1}}{n} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n^3}.$$

6. Pomocí součtu nekonečné geometrické řady vyjádřete zlomkem $3,24\overline{7}$.

7. Dana a Jana hází postupně kostkou. Hru začíná Dana a vyhraje, pokud hodí číslo složené. Pokud nehodí složené číslo, bude házet Jana. Jestliže Jana hodí prvočíslo, vyhrává ona, v opačném případě bude znovu házet Dana. Hráčky se popsáním způsobem střídají do té doby, než některá z nich zvítězí. Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že v této hře vyhraje Dana.

8. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dán interval

$$A_n = \left(-1 - \frac{3n}{n+2}, 2 + \frac{2n-1}{n} \right).$$

Rozhodněte, zda pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí mezi intervaly A_n a A_{n+1} vztah vhodné množinové inkluze. Své tvrzení zdůvodněte. Dále najděte reálná čísla a , b tak, aby platilo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (a, b).$$

Připomeňme, že symbol $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ značí průnik nekonečně mnoha množin tvaru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

9. Mezi čísla 4 a 37 vložte několik čísel tak, aby spolu s danými čísly tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a aby součet daných čísel spolu s vloženými čísly byl 246. Určete počet vložených čísel a diferencí příslušné aritmetické posloupnosti.
10. Zjistěte, zda existuje konvexní n -úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 100° a každý následující úhel je o 10° větší než předcházející.
11. Určete velikost nejmenšího vnitřního úhlu trojúhelníku, jehož číselné hodnoty délek stran v centimetrech jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{3}{2}$.
12. V geometrické posloupnosti platí

$$a_1 = -27, \quad a_n = -3, \quad s_n = -12\sqrt{3} - 39.$$

Vypočítejte n .

13. Posloupnost je dána rekurentně vyjádřením

$$a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^{n-1}, \quad a_1 = 2.$$

- a) Najděte pro tuto posloupnost vzorec pro n -tý člen. Své tvrzení dokažte.
 b) Dokažte, že uvedená posloupnost je geometrická. $q=3$
 c) Vypočítejte a_{150} a s_{80} (tj. určete hodnotu součtu prvních osmdesáti členů této posloupnosti).

14. Posloupnost je dána rekurentně vyjádřením

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{4n+2}{4n-2}, \quad a_1 = 2.$$

- a) Najděte pro tuto posloupnost vzorec pro n -tý člen. Své tvrzení dokažte. $a_n = 4n-2$
 b) Dokažte, že uvedená posloupnost je aritmetická.
 c) Vypočítejte a_{200} a s_{70} (tj. určete hodnotu součtu prvních sedmdesáti členů této posloupnosti).

15. Zjednodušte

$$4^{\frac{1}{3 \cdot 5}} \cdot 4^{\frac{1}{4 \cdot 6}} \cdot 4^{\frac{1}{5 \cdot 7}} \cdot \dots \cdot 4^{\frac{1}{(n+2)(n+4)}} \cdot \dots$$

16. Často užívaným způsobem zhodnocení finančních prostředků je stavební spoření. Klient se zavazuje, že jeho smlouva bude trvat alespoň 6 let, po které nemůže vložené prostředky vybírat. Tento produkt je navíc podporován státním příspěvkem, který představuje 15% z roční klientovy úločky, maximálně však částku 3000 Kč ročně. V současnosti je pro klienta možná nejatraktivnější nabídka společnosti Wüstenrot, která dává roční úrok 2,1% a přitom má nejnižší poplatky za vedení účtu a výpisy z něj - 285 Kč ročně. Při uzavření smlouvy přes internet si tato stavební spořitelna účtuje vstupní poplatek jen 0,5% z cílové částky, kterou si klient předem zvolí. Tento poplatek je spořitelnou stržen z prvního klientova vkladu při založení smlouvy. Další výhodou stavebního spoření je skutečnost, že při této formě spoření jsou úroky osvobozeny od daně z příjmu, která jinak činí 15%.
 Vymodelujte průběh stavebního spoření klienta, který si stanoví cílovou částku 150 000 Kč a založí účet 1.1.2008. Při založení smlouvy vloží první vklad 20 750 Kč (750 korun zaplatí za uzavření smlouvy). Další vklady bude dávat vždy pouze 1.1. každého roku po dobu trvání smlouvy, a to ve výši 20 000 Kč. Smluvní vztah hodlá ukončit přesně po šesti letech, tj. 31.12.2013. Jakou částku by klient za těchto podmínek celkově naspořil. Poplatek 285 Kč spořitelna strhává vždy k 31.12. každého roku, ve kterém účet klienta existuje. Státní podpora je klientovi připisována zpětně, pro jednoduchost předpokládejme, že k 1.5. příslušného roku (první podporu by tedy dostal 1.5.2009). Do výsledné částky je třeba zahrnout i podporu za rok 2013, kterou klient dostane později. Tato celková částka nesmí převýšit částku cílovou.

17. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}, \quad 6$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad |x| > 1$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = 1, \quad -1$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^{2n-2} = 2 \cdot \operatorname{tg} x, \quad \frac{7}{6} \pi, \frac{11}{6} \pi, k \cdot \frac{2}{3} \pi$$

e)

$$3(1 + \log_2 \cos x + \log_2^2 \cos x + \dots) = 2. \quad \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots, k \cdot \frac{\pi}{2}$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 243, zejména úlohy č. 9, 12, 16, 24, 27 30, 52, 53, 58, 62, 63, 67 - 73, 76, 78 - 82, 93, 96, 109 - 111, 113 - 119, 121, 122, 124, 127, 138, 161, 166, 169, 173.