

24. Výpočty objemů - úlohy k procvičení

- Užitím vzorce pro objem pravidelného šestibokého jehlanu odvoďte vztah pro výpočet objemu pravidelného šestibokého komolého jehlanu o délkách podstavných hran a_1 a a_2 ($a_1 > a_2$) a výšce v .
- Podstavou kolmého hranolu je pravoúhlý trojúhelník, jehož délky odvěsen jsou v poměru 3 : 4. Výška hranolu je o 2 cm kratší, než delší odvěsna podstavy a jeho povrch je 468 cm^2 . Vypočítejte objem tohoto hranolu. 940 cm^3
- Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany a . Vypočítejte objem tělesa $ACHF$. O jaké těleso se jedná? $V = \frac{2}{3}a^3$
- Do koule o poloměru r je vepsán pravidelný osmistěn. V závislosti na r vypočítejte objem tohoto osmistěnu. $V = \frac{4}{3}r^3$
- Do koule o poloměru r je vepsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Vypočítejte poměr objemů těchto tří těles. $\frac{1}{3} \pi r^3$
- Nádoba tvaru polokoule o poloměru r je zcela naplněna vodou. Po jejím naklonění o úhel $\alpha = 30^\circ$ z ní volně vyteče 11 l vody. Kolik litrů vody v nádobě zůstane? 5 l
- Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, jsou-li dány souřadnice jeho následujících vrcholů: $B = [1; -2; 3]$, $C = [7; 5; 1]$, $G = [-1; -4; 1]$ a $E = [1; 2; 0]$. Dále vypočítejte objem jehlanu $ABCDE$ a čtyřstěnu $ADGH$. 50 cm^3
- Vypočítejte objem obou kulových úsečí, na které rozděluje rovina $\rho : 4x - y + 8z + 10 = 0$ kouli $k : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 12z - 233 \leq 0$. $\frac{1134\pi}{3}$
- Velká krychle je složena z malých krychliček právě tří barev - bílých, modrých a zelených. Všechny malé krychličky mají hranu délky 2 cm. Určete objem velké krychle, víte-li, že bílých krychliček je $\frac{25}{48}$ z celkového počtu malých krychliček tvořících velkou krychli, modrých krychliček je $\frac{13}{72}$ z celkového počtu malých krychliček tvořících velkou krychli a zelených krychliček je méně než 3000. Najděte všechna řešení této úlohy. Svá tvrzení zdůvodněte. 4006 cm^3
- Tvrký papír tvaru obdélníku má rozměry 60 cm a 28 cm. V rozích se odstříhnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana odstřižených čtverců, aby objem krabice byl největší. Svá tvrzení podložte výpočty. $x = 6 \text{ cm}$
- Do koule o poloměru r vepište rotační kužel maximálního objemu. Svá tvrzení podložte výpočty. $V = \frac{8}{27}\pi r^3$
- Vypočítejte poměr objemů tří těles, která vzniknou rotací daného pravoúhlého trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$) kolem jeho stran. $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{6}$
- Užitím integrálního počtu odvoďte vzorec pro objem rotačního elipsoidu, který vznikne rotací elipsy o délce hlavní poloosy a a vedlejší poloosy b kolem své hlavní osy. $\frac{4}{3}\pi a b^2$
- Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru omezeného nerovnostmi

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \leq x \quad \text{a} \quad y \geq 0 \quad \left(\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\pi \right) \pi$$

kolem osy x . O jaké těleso se jedná? Výpočet proveďte

- užitím integrálního počtu,
- bez užití integrálního počtu.

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia. Obsah tohoto okruhu pokrývají především tyto kapitoly:

- Hranol, válec od str. 490 - zejména úlohy č. 103, 104, 110, 123, 129, 131.
- Jehlan a kužel od str. 495 - zejména úlohy č. 137, 139, 142, 148, 155, 158, 159, 167.
- Komolý jehlan a komolý kužel od str. 500 - zejména úlohy č. 174, 182, 183, 188, 191, 193.
- Plocha kulová a koule, jejich části od str. 503 - zejména úlohy č. 197, 204, 207, 210, 217, 226, 230, 232.