

22. Kuželosečky - úlohy k procvičení

- Definujte *parabolu* a zformulujte alespoň jedno tvrzení, které je s Vámi uvedenou definicí podmínkou ekvivalentní.
- Definujte
 - asymptotický směr* kuželosečky k ,
 - skutečnost, že kuželosečka k je *regulární*,
 - skutečnost, že kuželosečka k je *bodově reálná*,
 - tečnu* kuželosečky k .
- Zformulujte tvrzení, které udává vztah, s jehož využitím lze nalézt
 - všechny *střed*y, resp. *singulární body* kuželosečky k ,
 - tečnu* kuželosečky k , která prochází bodem $T = [m; n] \in k$,
 - všechny *osy* kuželosečky k .
- Napište rovnici elipsy, která má vedlejší vrchol $C = [-3; 5]$ a ohniska $F = [0; 1]$ a $G = [-6; 1]$.
- Napište rovnici paraboly, která má řídící přímku $d : x = 1$ a ohnisko $F = [7; -2]$.
- Napište rovnici hyperboly, která má asymptoty $a_1 : 4x - 3y - 18 = 0$ a $a_2 : 4x + 3y - 6 = 0$ a jedno z ohnisek $F = [-2; -2]$.

7. Necht' je dána kuželosečka

$$k : 4x^2 + y^2 - 16x - 2y - 3 = 0.$$

Dokažte, že kuželosečka k je elipsa, najděte její střed, ohniska a vrcholy. Dále vypočtete obsah čtverce, který je do této elipsy vepsán.

8. Vypočtete obsah kosočtverce, jehož vrcholy tvoří ohniska a vedlejší vrcholy elipsy

$$e : 4x^2 + 13y^2 - 16x + 78y + 81 = 0.$$

9. Dokažte, že následující kuželosečky jsou regulární, rozhodněte, zda jsou bodově reálné či imaginární a klasifikujte (tj. pojmenujte) je. Dále najděte všechny jejich asymptotické směry, střed, singulární body, osy, vrcholy a asymptoty (případně vysvětlete, proč neexistují). Svá tvrzení zdůvodněte, resp. podložte výpočty.

- $k_1 : x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$,
- $k_2 : x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$,
- $k_3 : x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y - 9 = 0$,
- $k_4 : x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$,
- $k_5 : 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$.

10. Necht' je dána kuželosečka

$$k : x^2 + 2bxy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0,$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je parametr. Provedte klasifikaci kuželosečky k vzhledem k parametru b (tj. rozhodněte, zda je regulární či singulární a pojmenujte ji).

11. Dokažte, že následující kuželosečky jsou singulární, rozhodněte, zda jsou bodově reálné či imaginární a klasifikujte (tj. pojmenujte) je. V případě bodově reálných kuželoseček dále určete i rovnice útvarů, jimiž jsou tvořeny. Odpovězte na základě nalezení jejich asymptotických směrů, středů a singulárních bodů.

- a) $k_1 : x^2 + 2xy - 8y^2 - 2x + 10y - 3 = 0$,
 b) $k_2 : 2x^2 + y^2 - 4x + 8y + 18 = 0$,
 c) $k_3 : x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$,
 d) $k_4 : 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$,
 e) $k_5 : 4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.

12. Napište rovnice všech přímek, které procházejí počátkem soustavy souřadnic a s kuželosečkou

$$k : x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

mají právě jeden společný bod.

13. Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem $M = [-11; -1]$ a s kuželosečkou

$$k : x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$$

mají právě jeden společný bod.

14. Nechť je dána hyperbola $xy - 2 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

- a) Najděte všechny společné body obou křivek.
 b) Napište rovnice tečen v jednom z jejich společných bodů a určete odchylku těchto tečen.

15. Nechť je dána parabola $p : y^2 = 12x$ a přímka $q : x - y + 5 = 0$.

- a) Dokažte, že přímka q nemá s parabolou p žádný společný bod.
 b) Na parabole p najděte takový bod M , jehož vzdálenost od přímky q je nejmenší.
 c) Napište rovnici tečny t paraboly p v bodě M (z předchozí části) a ukažte, že přímky q a t jsou rovnoběžné.

16. V rovině je dána přímka $q : y = 0$ a parametrický systém parabol

$$M : y = px^2 + (p + 1)x + p - 1,$$

kde $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ je parametr.

- a) Určete všechny hodnoty parametru p , pro které $k \cap q = \emptyset$, kde $k \in M$.
 b) Určete všechny hodnoty parametru p , pro které je přímka q tečnou paraboly $k \in M$.

V dalších úlohách předpokládejme, že pro $k \in M$ platí

$$k \cap q = \{X_1 = [x_1; 0], X_2 = [x_2; 0]\}.$$

Pro jednoznačnost následujících úvah navíc bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$.

- c) Určete všechny hodnoty parametru p , pro které platí $x_1 > 0$ a $x_2 > 0$.
 d) Určete všechny hodnoty parametru p , pro které platí $x_1 < 0$ a $x_2 < 0$.
 e) Určete všechny hodnoty parametru p , pro které platí $x_1 < 0$ a $x_2 > 0$.

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia - každý dle své individuální potřeby. Obsah tohoto okruhu pokrývají zejména tyto kapitoly:

- Parabola od str. 533.
- Elipsa a hyperbola od str. 548.