

20. Přímky a roviny v prostoru - úlohy k procvičení

1. Zformulujte tvrzení, které klasifikuje všechny možné případy *vzájemné polohy tří různých rovin v prostoru*.
2. Definujte skutečnost, že rovina α je kolmá k rovině β . Dále zformulujte *kritérium rovnoběžnosti dvou rovin*.
3. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ a nechť body K, L, M a N jsou po řadě středy hran EH, CD, AE a EF . Nechť S je průsečíkem úhlopříček ve čtverci $ABFE$.

A) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek (v případě, že nejsou rovnoběžné, rozhodněte i o tom, zda jsou kolmé)

a) $\overrightarrow{AL}$ a $\overrightarrow{BK}$,

b) $\overrightarrow{LM}$ a $\overrightarrow{SC}$.

B) Rozhodněte o vzájemné poloze přímky $\overrightarrow{EG}$ a roviny $\overrightarrow{BDH}$ (v případě, že nejsou rovnoběžné, rozhodněte i o tom, zda jsou kolmé).

C) Rozhodněte o vzájemné poloze rovin (v případě, že nejsou rovnoběžné, rozhodněte i o tom, zda jsou kolmé)

a) $\overrightarrow{KMN}$ a $\overrightarrow{AFH}$,

b) $\overrightarrow{BCE}$ a $\overrightarrow{DGH}$,

c) $\overrightarrow{ALK}$ a $\overrightarrow{BDH}$.

Svá tvrzení dokažte.

4. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p a q (v případě, že nejsou rovnoběžné, rozhodněte i o tom, zda jsou kolmé; v případě, že jsou různoběžné, najděte i jejich průsečík), jestliže

a) $p = \{[2 + 2t; -t; 1 + 4t]; t \in \mathbb{R}\}$ a $q = \overrightarrow{AB}$, kde $A = [1; 2; -4]$ a $B = [3; 1; 0]$,

b) $p = \{[2 + 2t; 6 + 3t; -4 - 2t]; t \in \mathbb{R}\}$ a $q = \{[1 - s; 1 + 2s; -4 + 2s]; s \in \mathbb{R}\}$,

5. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ , jestliže $p = \{[5 + 2t; 3 + t; -4 - 2t]; t \in \mathbb{R}\}$ a $\rho: x + 2y - z - 3 = 0$. V případě, že jsou různoběžné, najděte i jejich průsečík. Dále najděte přímku p' , která je kolmým průmětem přímky p do roviny ρ .

6. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin $\rho: 4x - 2y - z + 4 = 0$, $\sigma: x + y - z + 1 = 0$ a $\tau: 3x + y - 2z + 3 = 0$ ve smyslu klasifikace vzájemné polohy tří různých rovin. Určete i všechny jejich společné body.

7. Bodem $A = [1; -2; 3]$ veďte rovinu ρ , která je kolmá k průsečnici rovin α a β , jestliže $\alpha: 3x - 2y + 2z + 3 = 0$ a $\beta: x + y - z + 6 = 0$.

8. Nechť jsou dány přímky $p = \{[t; -2 - 2t; 3 + t]; t \in \mathbb{R}\}$ a $q = \{[6 - 3s; 4 + 2s; 10]; s \in \mathbb{R}\}$.

a) Dokažte, že přímky p a q jsou mimoběžné.

b) Najděte rovnici osy mimoběžek p a q .

c) Na přímce p najděte bod P_1 a na přímce q najděte bod Q_1 tak, aby přímka $\overrightarrow{P_1Q_1}$ procházela bodem $M = [-5; -14; 0]$.

d) Na přímce p najděte bod P_2 a na přímce q najděte bod Q_2 tak, aby vektor $\vec{u} = (0; 3; 5)$ byl směrovým vektorem přímky $\overrightarrow{P_2Q_2}$.

9. Uveďte hlavní zásady volného rovnoběžného promítání a zobrazte v něm krychli, pravidelný čtyřboký jehlan, pravidelný šestiboký hranol, pravidelný čtyřstěn. Rozměry těles si zvolte libovolně.

10. Nechť je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Sestrojte průsečnici p rovin $\overleftrightarrow{A'BD}$ a $\overleftrightarrow{D'EF}$. Úlohu řešte ve volném rovnoběžném promítání, tzn. na povrchu hranolu sestrojte dva různé body, které přímkou p určují. Přitom stručně popište, jak byl každý z těchto bodů zkonstruován. Rozměry hranolu si zvolte libovolně.

11. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a a body

$$\begin{aligned} K &\in \overrightarrow{AB}, & |AK| &= \frac{3}{2}a, \\ L &\in \overrightarrow{DH}, & |DL| &= 2a. \end{aligned}$$

Sestrojte průnik přímky $\overleftrightarrow{KL}$ a krychle $ABCDEFGH$. Úlohu řešte ve volném rovnoběžném promítání. Dále vypočtete délku úsečky K_0L_0 , která je průnikem přímky $\overleftrightarrow{KL}$ a krychle $ABCDEFGH$. Svá tvrzení zdůvodněte.

12. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ a nechť body K a L jsou po řadě středy hran FG a EF . Sestrojte přímkou p , na níž leží bod F_0 , který je kolmým průmětem bodu F do roviny $\overleftrightarrow{BKL}$. Úlohu řešte ve volném rovnoběžném promítání.

13. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a a body

$$\begin{aligned} K &\in \overrightarrow{DC}, & |DK| &= 2a, \\ L &\in \overrightarrow{DH}, & |DL| &= 2a. \end{aligned}$$

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou $\overleftrightarrow{AKL}$. Úlohu řešte ve volném rovnoběžném promítání. Dále zjistěte, jaký útvar je tímto řezem a vypočtete jeho obsah. Svá tvrzení zdůvodněte.

14. Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ rovinou $\overleftrightarrow{KL F}$, kde bod K je středem hrany DV a bod L leží na hraně BV tak, že platí $4|BL| = |BV|$. Úlohu řešte ve volném rovnoběžném promítání. Rozměry jehlanu si zvolte libovolně.

Další úlohy. Ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 478, zejména úlohy č. 16 - 20, 25 - 40, 56 - 58, 64 - 68. V této sbírce není obsažena problematika analytické geometrie v prostoru, zato mezi zmíněnými úlohami naleznete množství polohových konstrukčních úloh (řezy, příčky mimoběžek, průsečnice rovin, průnik tělesa a přímky).