

1. Celá čísla - úlohy k procvičení

1. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
2. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad vyvracející jejich obecnou platnost. V případě, že dané tvrzení obecně neplatí, zformulujte předpoklady, po jejichž splnění se již bude jednat o pravdivé tvrzení.

a) Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Pak existuje jediná dvojice celých čísel u a v tak, že platí $(a, b) = au + bv$.

b) Nechť $a, b, c \in \mathbb{N}$ jsou taková, že $a \mid b$ a $a \mid c$. Pak pro libovolná $k, l \in \mathbb{Z}$ platí $a \mid (kb + lc)$.

3. Najděte všechny dvojice čísel $a, b \in \mathbb{N}$ vyhovující podmínkám

$$(a, b) = 20 \quad \text{a} \quad ab = 7200.$$

4. Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ platí:

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a^2 + b^4, b^3) = 1.$$

5. Nechť $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$. Dokažte, že platí

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a - b, ab) = 1.$$

6. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1}),$$

$$24 \mid (25^{n+1} - 72n + 23),$$

$$17 \nmid (3^{4n+1} - 4^{3n+2}).$$

7. Najděte největšího společného dělitele výrazu

$$V(n) = n^5 - n^3$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

8. Vypočítejte $(952, 748)$ a najděte celá čísla u, v tak, aby platilo $(952, 748) = u \cdot 952 + v \cdot 748$.

9. Dokažte, že platí

$$13 \mid (3^{42} - 5^{24}).$$

10. Najděte všechna $n \in \mathbb{Z}$, pro něž platí

$$(3n + 2) \mid (5n - 1).$$

Své tvrzení zdůvodněte.

11. Nechť $n, a, b \in \mathbb{Z}$ jsou taková, že $n = 10a + b$. Pak platí

$$31 \mid n \Leftrightarrow 31 \mid (a - 3b).$$

Dokažte.

12. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost.
Pro $\forall a, b \in \mathbb{N}$ platí $ab + a + b \neq 96$.

13. Najděte nejmenší možná čísla $a, b \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$70a^2 = 1100b^3.$$

14. Nechť je dáno číslo

$$n = 1\,071\,854\,784$$

na základě kritérií dělitelnosti rozhodněte, kterými z prvních patnácti přirozených čísel je číslo n dělitelné. Své tvrzení zdůvodněte. Jednotlivé podíly již nepočítejte.

15. Zdůvodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ je

$$4n^4 + 81$$

složeným číslem.

16. Zformulujte a dokažte tvrzení označovaná jako tzv. *kritérium dělitelnosti čtyřmi, devíti, jedenácti...*

17. Určete počet celočíselných členů rozvoje

$$\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \sqrt[5]{5} \right)^{25}.$$

Své tvrzení zdůvodněte.

18. Nechť je dána množina $A = \{1, 2, 3\}$.

a) Určete počet prvků množin $A \times A$ a $P(A)$, kde $P(A)$ značí množinu všech podmnožin množiny A . Dále ve formálně správném tvaru запиšte alespoň jeden prvek množiny $A \times A$ i množiny $P(A)$.

b) Určete počet všech

– injektivních, *nejméně jedno*

– surjektivních, *vše*

– bijektivních *nejméně jedno*

zobrazení $A \times A \rightarrow P(A)$, tj. zobrazení množiny $A \times A$ do množiny $P(A)$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

19. Určete obor hodnot funkce

$$f : y = \left[3 \sin 2x - \frac{\pi}{2} \right],$$

kde symbol $[z]$ značí celou část z reálného čísla z , tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo z .

20. V největším číselném oboru, ve kterém je definována, vyřešte nerovnici

$$\binom{x}{2} + \binom{x+3}{x+1} + \binom{x+6}{2} < 93.$$

21. V největším číselném oboru, ve kterém je definována, vyřešte soustavu rovnic

$$\binom{x+1}{y+1} : \binom{x+1}{y} : \binom{x+1}{y-1} = 5 : 5 : 3.$$

22. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{3n+1}{2} + \binom{4n+2}{2} = \binom{5n+2}{2}.$$

23. Dokažte, že libovolné kombinační číslo je číslem přirozeným.

24. Vyřešte v $\mathbb{Z}^2$ i $\mathbb{N}^2$ rovnice

$$\begin{aligned} 13x + 11y &= 199, \\ 2x + 6y &= 3. \end{aligned}$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia, str. 140, zejména úlohy č. 266, 268, 270, 273, 276, 277, 278, 279, 280, 282, 287, 295, 301, 304, 306, 309, 310, 313, 316, 317, 319, 320.