

## 18. Vektory, vektorové prostory - úlohy k procvičení

1. Definujte bázi a dimenzi vektorového prostoru, definujte skalární součin vektorů  $\vec{u}_1$  a  $\vec{u}_2$ , definujte skutečnost, že vektory  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  jsou lineárně závislé.
2. Zformulujte tvrzení, jehož důkazem je tzv. *Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces*.
3. Rozhodněte, zda množina

$$A = \{(t; s; 0; 2; t); t, s \in \mathbb{R}\}$$

je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{R}^5$ . Pokud ne, najděte  $\langle A \rangle$ , tj. vektorový podprostor generovaný množinou  $A$  (neboli lineární obal množiny  $A$ ). Dále určete i bázi a dimenzi  $\langle A \rangle$ . Konečně najděte i ortogonální a ortonormální bázi  $\langle A \rangle$ . Svá tvrzení zdůvodněte.

4. Zvolte si libovolně kartézskou soustavu souřadnic a umístěte do ní pravidelný osmistěn  $ABCDEFGF$  o hraně délky  $a$ , tj. určete souřadnice všech jeho vrcholů. Dále pomocí vektorů ukažte, že  $\vec{AE} \parallel \vec{CF}$  a  $\vec{AB} \perp \vec{EF}$ .
5. Nechť jsou dány body  $A = [4; 6]$ ,  $B = [-5; -6]$ ,  $C = [-3; 5]$  a  $C_0 = [1; 2]$ .
  - a) Dokažte, že  $C_0$  je patou výšky z vrcholu  $C$  trojúhelníku  $ABC$ . (Skutečnost, že  $ABC$  je trojúhelník, nemusíte ověřovat).
  - b) Určete souřadnice bodu  $D_1$  tak, aby útvar  $ABCD_1$  (v tomto pořadí vrcholů) byl rovnoběžníkem.
  - c) Určete souřadnice bodu  $D_2$  tak, aby útvar  $ABCD_2$  (v tomto pořadí vrcholů) byl lichoběžníkem se základnami  $BC$  a  $AD$  a platilo  $3|BC| = |AD|$ .
  - d) Určete souřadnice bodu  $D_3$  tak, aby útvar  $AD_3BC$  (v tomto pořadí vrcholů) byl deltoidem.
  - e) Vypočtěte obsah  $S$  lichoběžníku  $ABCD_2$ .
6. Nechť  $W$  je podprostor aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$  takový, že  $W = \langle \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} \rangle$ , kde  $\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (-1; 1; -1; 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1; 0; 1; 1)$  a  $\vec{u}_4 = (1; 2; 1; 2)$ .
  - a) Určete bázi a dimenzi prostoru  $W$ .
  - b) Rozhodněte, zda  $\vec{x} \in W$  a  $\vec{y} \in W$ , jestliže  $\vec{x} = (2; 3; 2; 1)$  a  $\vec{y} = (1; 1; 0; 1)$ . Pokud ano, vyjádřete tento vektor jako lineární kombinaci generátorů prostoru  $W$ .
7. Najděte ortogonální bázi prostoru  $W$ , kde  $W$  je podprostor aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$  takový, že  $W = \langle \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} \rangle$ , přičemž  $\vec{u}_1 = (1; 1; 3; 3)$ ,  $\vec{u}_2 = (1; 2; 3; 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (0; 1; 1; 2)$  a  $\vec{u}_4 = (3; 4; 8; 3)$ .
8. Nechť jsou dány vektory  $\vec{y} = (2; 4; -1)$  a  $\vec{z} = (3; 1; 2)$ . Určete hodnotu parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby pro vektor  $\vec{x} = (1; p; 2)$  platilo  $(\vec{y} \times \vec{x}) \perp (\vec{x} \times \vec{z})$ .
9. Nechť jsou dány vektory  $\vec{y} = (1; 3; 0)$  a  $\vec{z} = (-1; 2; 3)$ . Najděte vektor  $\vec{x}$ , pro který platí  $|\angle \vec{x} \vec{y}| = 45^\circ$ ,  $\vec{x} \perp \vec{z}$  a  $|\vec{x}| = \sqrt{5}$ .
10. V rovnoběžnostěnu  $ABCDEFGH$  jsou dány vrcholy  $A = [1; 0; 2]$ ,  $B = [3; 4; 3]$ ,  $D = [-1; 4; 6]$  a  $E = [2; 1; -5]$ .
  - a) Určete souřadnice vrcholů  $C$ ,  $F$ ,  $G$  a  $H$ .
  - b) Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu  $ABCDEFGH$ .
11. Na ose  $z$  určete bod  $D$  tak, aby objem čtyřstěnu  $ABCD$ , kde  $A = [2; -3; 1]$ ,  $B = [1; 0; 3]$ ,  $C = [3; 1; -1]$ , byl  $14 \text{ cm}^3$ .

**Další úlohy.** Ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 221, zejména úlohy č. 41 - 52