

17. Kružnice - úlohy k procvičení

1. Definujte *kružnici*. Udejte příklady několika významných kružnic a uveďte jejich vlastnosti.
2. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost. V případě, že dané tvrzení obecně neplatí, zformulujte předpoklady, po jejichž splnění se již bude jednat o pravdivé tvrzení.
Nechť A, B, C, D a X jsou body v rovině, pro které platí

$$|AX| |BX| = |CX| |DX|.$$

Pak existuje kružnice k , na které leží každý z bodů A, B, C a D .

3. Rozhodněte, zda kuželosečka

$$k: x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$$

je kružnicí. Pokud ano určete její střed a poloměr. Dále napište rovnici útvaru, který je obrazem k

- a) v osově souměrnosti, jejíž osou je přímka $o: -2x + y - 5 = 0$,
 - b) ve stejnolehlosti se středem $S = [-2, 3]$ a koeficientem $\lambda = -\frac{1}{2}$.
4. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky $p: 3x + 4y - 15 = 0$, její střed leží na přímce $q: x + 2y + 6 = 0$ a její poloměr je $r = 5$ cm.
 5. Napište rovnici kružnice, která se dotýká souřadnicových os x i y a jejíž střed leží na přímce $q: x - y + 3 = 0$.
 6. Napište rovnici kružnice, která je vepsaná trojúhelníku KLM , kde $K = [2, 1]$, $L = [6, 4]$ a $M = [6, 1]$.
 7. Nechť je dána úsečka AB délky 4 cm. Vyšetřete, co je množinou M všech bodů X v rovině s vlastností $|AX| = 3|BX|$.
 8. Nechť je dána přímka p a na ní dva různé body A a B . Vyšetřete, co je množinou M všech bodů X v rovině v nichž se dotýkají každé dvě kružnice, z nichž jedna se dotýká přímky p v bodě A a druhá v bodě B .
 9. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a bod P , $|SP| < r$. Vyšetřete, co je množinou M všech bodů X v rovině, které jsou středem úsečky AP , kde $A \in k$ je libovolný bod, tj. $M = \{X \in \mathbb{E}_2; |PX| = |AX|, \text{ kde } A \in k\}$.
 10. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$, kde $r = 8$ cm a bod A je takový vnější bod kružnice k , že jistá sečna kružnice k procházející bodem A vytíná na k tětivu XY (bod X je vnitřním bodem úsečky AY), pro kterou platí

$$|XY| = \sqrt{6} \text{ cm} \quad \text{a} \quad \frac{|YX|}{|XA|} = \frac{1}{2}.$$

Vypočtete délku úsečky AS .

11. Nechť jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ takové, že $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$. Sestrojte přímku p , která prochází bodem A a na každé z kružnic k_1 a k_2 vytíná tětivu stejné délky.
12. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a v její vnější oblasti body A a B . Sestrojte kružnici l , která se dotýká kružnice k a prochází body A a B .
13. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$, přímka p taková, že $p \cap k = \emptyset$ a bod $T \in p$. Sestrojte kružnici l , která se dotýká kružnice k a přímky p v bodě T .
14. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C takový, že $|AC| > |BC|$. Sestrojte kružnici k takovou, aby se dotýkala přímky $\overleftrightarrow{AC}$, aby měla střed na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ a aby procházela bodem B .

U všech zde uvedených konstrukčních úloh:

- Udělejte náčrt, rozbor a postup konstrukce. Rys provádět nemusíte.
- Diskusi proveďte pouze kvalitativně (tj. uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může daná úloha mít; závislost počtu řešení úlohy na poloze a rozměrech zadaných útvarů diskutovat nemusíte).

Další úlohy. Ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia

- od str. 362, zejména úlohy č. 86, 88, 91, 95, 102 - 109;
- od str. 540, zejména úlohy č. 186, 189, 190, 193, 198 - 201