

16. Trojúhelníky a mnohoúhelníky - úlohy k procvičení

1. Zformulujte a dokažte tzv. *Euklidovu větu o výšce, sinovou větu, ...*
2. Zformulujte větu o existenci *kružnice opsané* trojúhelníku ABC . (Požadovanou větu uveďte tak, aby odpovídala na následující otázky. Existuje kružnice opsaná v libovolném trojúhelníku? Je určena jednoznačně? Kde leží její střed?) Svá tvrzení dokažte.
3. Dokažte, že kosočtverec je tečnový čtyřúhelník a obdélník je tětiový čtyřúhelník. Co odtud vyplývá pro čtverec?
4. Určete součet velikostí všech vnitřních úhlů v konvexním n -úhelníku.
5. Daný rovnostranný trojúhelník o straně délky a pokryjte třemi shodnými kruhy o nejmenším možném poloměru r . Popište způsob pokrytí a vypočítejte r . To, že je rovnostranný trojúhelník pokryt třemi kruhy znamená, že libovolný jeho bod současně leží v některém z těchto tří kruhů.
6. Nechť je dán trojúhelník ABC , jehož vrcholy mají následující souřadnice: $A = [-1; 0]$, $B = [2; -4]$ a $C = [5; 8]$. (Skutečnost, že zadané body neleží na jedné přímce, nemusíte ověřovat!)
 - Napište rovnici těžnice t_b , osy úhlu α , osy strany c , střední příčky ke straně AB .
 - Určete průsečík V jeho výšek, těžiště T , střed S kružnice opsané.
 - Vypočítejte délky jeho stran, výšek, těžnic, velikosti vnitřních úhlů.
7. Nechť V značí ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníku ABC , A_0 patu výšky v_a z vrcholu A a B_0 patu výšky v_b z vrcholu B . Vypočítejte délku v_b , víte-li, že $v_a = 7$ cm, $|AV| = 4$ cm a $|BV| = 6$ cm.
8. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

9. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem α a kratší odvěsnou $|AB| = 30$ mm. Určete délku kružnice k , která má průměr AC , jestliže $|AD| = 24$ mm, kde $D \in k \cap BC$.
10. Dokažte, že v lichoběžníku platí, že středy ramen a středy úhlopříček leží na jedné přímce. Uvažovaný lichoběžník je obecný, tj. jeho ramena nemusí mít stejné délky!
11. V trojúhelníku ABC je dáno

$$\alpha = 30^\circ, \quad b = (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}, \quad c = 1 \text{ cm}.$$

Vypočítejte a , β , γ , r a S , kde r značí poloměr kružnice opsané a S značí obsah trojúhelníku ABC .

12. Vypočítejte šířku řeky, jestliže na jednom břehu byla vyznačena úsečka KL délky 40 m a dále byly změřeny úhly $|\angle LKS| = 76^\circ 24'$ a $|\angle KLS| = 43^\circ 52'$, kde S je bod na druhém břehu řeky.
13. Strana pravidelného devítiúhelníku měří 5 cm. Vypočítejte poloměr kružnice vepsané i opsané tomuto devítiúhelníku.
14. Bod A , který je obrazem komplexního čísla $z_1 = -\sqrt{3} - i$ v Gaussově rovině, je jedním z vrcholů pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$, který má střed v počátku Gaussovy roviny. Určete komplexní čísla, která jsou v Gaussově rovině obrazy zbylých vrcholů tohoto šestiúhelníku.
15. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li při obvyklém značení dáno
 - a) $a + b$, c , γ ,
 - b) $a + b$, α , β ,

- c) t_a, t_c, α ,
- d) a, t_b, r - poloměr kružnice opsané,
- e) α, β, ρ - poloměr kružnice vepsané,
- f) a, α, ρ - poloměr kružnice vepsané.

16. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li při obvyklém značení dáno

- a) $a, c, e = |AC|, \omega = |\sphericalangle AXB|$, kde $X \in AC \cap BD$,
- b) $a + c, b, d, v = |\overleftrightarrow{ABCD}|$.

17. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li při obvyklém značení dáno

- a) $a, b, e = |AC|, f = |BD|, \varepsilon = |\sphericalangle AXB|$, kde $X \in AC \cap BD$,
- b) α, β, ρ - poloměr kružnice vepsané a je známa skutečnost, že $ABCD$ je dvojstředový, tzn. existuje kružnice jemu opsaná i vepsaná (tyto kružnice nemusí mít stejný střed).

U všech výše uvedených konstrukčních úloh udělejte pouze náčrt, rozbor a zapište postup konstrukce. Rys provádět nemusíte. Diskusi proveďte pouze kvalitativně (tj. uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může daná úloha mít; závislost počtu řešení úlohy na volbě hodnot zadaných parametrů diskutovat nemusíte).

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia - každý dle své individuální potřeby. Obsah tohoto okruhu pokrývají zejména tyto kapitoly:

- Vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka. Věty o shodnosti trojúhelníků od str. 358.
- Podobnost trojúhelníků od str. 392.
- Věty Eukleidovy a Pythagorova od str. 397.
- Sinová a kosinová věta od str. 445.