

14. Kombinatorika - úlohy k procvičení

1. Popište, jak je tvořeno schéma označované jako tzv. *Pascalův trojúhelník* a uveďte jeho základní vlastnosti. Zformulujte a dokažte tvrzení o kombinačních číslech, o jehož platnost se konstrukce Pascalova trojúhelníku opírá.
2. Zjistěte, kolik různých čtyřciferných čísel dělitelných 36 lze sestavit z číslic 0,1, 2, 3, 4 tak, aby se v nich žádná číslice neopakovala. Svě úvahy zdůvodněte a všechna tato čísla vypište.
3. Zjednodušte

$$\sum_{i=0}^n (-2)^i \binom{n}{i}.$$

4. Rozhodněte, kolik prvků mohou mít množiny A a B , jestliže počet všech zobrazení $A \rightarrow B$ byl roven 81. Případně zdůvodněte, proč požadované množiny neexistují.
5. V obdélníku o délkách stran 3 cm a 4 cm je libovolně rozmístěno 7 bodů. Dokažte, že mezi nimi existují alespoň dva body, jejichž vzdálenost je nejvýše $\sqrt{5}$ cm.
6. V největším číselném oboru, ve kterém je definována, vyřešte rovnici

$$\binom{x}{x} + \binom{x+1}{x} + \binom{x+2}{x} + \binom{x+3}{x} = \frac{x^3 + 59}{6}.$$

7. V rozvoji výrazu

$$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$$

je součet prvních tří koeficientů roven 67. Určete na základě této podmínky absolutní člen rozvoje.

8. Určete počet racionálních členů rozvoje

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{50}.$$

9. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad \text{a} \quad \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

10. Porovnejte čísla

$$\binom{563}{35} \quad \text{a} \quad \binom{562}{528}$$

11. Nechť A je 10-i prvková množina a B je 20-i prvková množina. Určete počet všech injektivních zobrazení $A \rightarrow B$.
12. Kolika způsoby lze rozdělit 8 chlapců a 4 děvčata do dvou šestičlenných volejbalových družstev tak, aby v každém družstvu bylo aspoň jedno děvče?
13. Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 30 různých knih, aby jedna osoba měla právě 10 knih (počet knih, které dostanou ostatní není nijak omezen)?
14. Určete počet řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 52$$

a) v $\mathbb{N}_0^5$,

b) v $\mathbb{N}_0^5$ za podmínky, že $x_i > 3$ pro libovolné $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

15. Kolik různých „slov“ (bez ohledu na to, zda dávají smysl) - tzv. anagramů - lze získat z písmen slova KOMBINATORIKA? Každé z hledaných „slov“ má právě 13 písmen a každé písmeno, které daný anagram tvoří, je použito právě tolikrát, kolikrát je ve slově „kombinatorika“ obsaženo. V kolika z těchto anagramů
- a) se pravidelně střídají samohlásky a souhlásky,
 - b) nejsou žádné dvě samohlásky vedle sebe,
 - c) není písmeno M bezprostředně za písmenem B?
16. Kolika způsoby je možné v kině rozesadit do jedné řady, v níž je $2n$ míst, n manželských párů tak, aby žádný manžel neseděl vedle své manželky.
17. Určete, na jaký největší počet částí lze rozdělit rovinu pomocí n kružnic.

Další úlohy. Ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia v kapitole XI. *Kombinatorika, binomická věta* (od str. 271) naleznete dostatek úloh k procvičení - každý podle své individuální potřeby.