

13. Důkazy - úlohy k procvičení

1. Zformulujte tzv. *princip matematické indukce*. Dále zformulujte libovolnou matematickou větu (tj. libovolné pravdivé tvrzení) a matematickou indukcí jej dokažte.
2. Dokažte, že každá z formulí

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A') \quad \text{a} \quad (A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow (B' \wedge A)$$

je tautologií. Vysvětlete význam těchto tautologií:

3. Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda platí

- a) $A \cap (B - C) \subseteq A \cap (B \cup C)$,
- b) $A \cap (B - C) \supseteq A \cap (B \cup C)$.

V případě, že inkluze platí, proveďte její korektní důkaz. V případě, že inkluze neplatí, uveďte protipříklad vyvracející její obecnou platnost.

4. Nechť je dána funkce

$$f : y = \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2} - 1.$$

Dokažte, že funkce f je

- lichá,
- omezená.

5. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$24 \mid (n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n).$$

6. Nechť je dán pravidelný trojboký jehlan $ABCD$. Dokažte, že přímka $\overleftrightarrow{AB}$ je kolmá k přímce $\overleftrightarrow{CD}$.
7. Dokažte, že rovnoramenným trojúhelníkem, který má při daném obsahu S minimální obvod o je trojúhelník rovnostranný.
8. Dokažte, že body $A = [0; 1]$, $B = [2; 2]$ a $C = [1; 4]$ tvoří vrcholy pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.
9. Dokažte, že obrazy ortocentra V trojúhelníku ABC
 - v osových souměrnostech podle os, které tvoří strany trojúhelníku ABC ,
 - ve středových souměrnostech se středy ve středech stran trojúhelníku ABCleží na kružnici opsané trojúhelníku ABC .
10. V rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AC| > |BD|$. Nechť M je takový bod úsečky AC , že čtyřúhelník $BCDM$ je tětíkový. Dokažte, že přímka $\overleftrightarrow{BD}$ je tečnou kružnice opsané trojúhelníku ADM .
11. Nechť je dán trojúhelník ABC a přímka p , na níž leží těžnice t_c tohoto trojúhelníku. Dokažte, že body A a B mají od přímky p stejnou vzdálenost.
12. Nechť je dána úsečka AB . Vyšetřete, co je množinou M všech těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB . Své tvrzení dokažte.

13. Necht jsou dány body A, B ($A \neq B$). Vyšetřete množinu M všech bodů C v rovině takových, aby
- trojúhelník ABC byl ostroúhlý,
 - z bodů S a V , kde S značí střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek, bylo vidět úsečku AB pod stejným úhlem.
14. Necht je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s ostrými úhly α a β . Necht na základně AB existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že $ECVD$, kde V značí průsečík přímek $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, je tětiový čtyřúhelník.
15. Necht je dán trojúhelník ABC takový, že jeho vnitřní úhly α a β jsou ostré. Necht Q značí průsečík těžnice AS_{BC} s výškou CC_0 a S_0 kolmý průmět bodu S_{BC} na úsečku AB . Dále necht R značí na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{C_0C}$ takový bod, že $|C_0R| = |CQ|$. Dokažte, že přímky $\overleftrightarrow{AS_{BC}}$ a $\overleftrightarrow{RS_0}$ jsou různoběžné a že jejich průsečík P leží na kolmici vedené bodem B k přímce $\overleftrightarrow{AB}$.
16. Necht je dán rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou KL . Necht k a l jsou libovolné dvě kružnice, které mají vnější dotyk v bodě T , přičemž k (resp. l) se dotýká přímky $\overleftrightarrow{KM}$ ($\overleftrightarrow{LM}$) v bodě K (L). Dokažte, že bod T leží na kružnici $m(M; |KM|)$.
- Návod. Ukažte, že přímka $\overleftrightarrow{MT}$ je společnou tečnou k a l .
17. Necht P je libovolný ale pevně zvolený vnitřní bod daného trojúhelníku ABC . Necht X (Y) značí průsečík přímky $\overleftrightarrow{AP}$ ($\overleftrightarrow{BP}$) se stranou BC (AC). Označme D průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY . Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětiový právě tehdy, když bod D leží na přímce $\overleftrightarrow{CP}$.

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia zejména všechny úlohy v kapitole *Matematická indukce* str. 240 - 242. Není nutné jednotlivé důkazy provádět matematickou indukcí! Naopak u mnohých úloh není důkaz indukcí nejvýhodnější...