11. Polynomy, algebraické rovnice - úlohy k procvičení

1. Následující tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad vyvracející jejich obecnou platnost. V případě, že dané tvzení obecně neplatí, doplňte dodatečný předpoklad, s nímž se již bude jednat o pravdivé tvrzení (důkaz tohoto tvrzení již neprovádějte).

   a) Je-li číslo x_0 kořenem reciproké rovnice, pak i číslo $\frac{1}{x_0}$ je kořenem této rovnice.

   b) Algebraická rovnice lichého stupně n ($n \in \mathbb{N}$) má alespoň jeden reálný kořen.

2. Dokažte, že pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ je polynom
$$x^4 + (1-a)x^3 + x^2 + a$$
dělitelný polynomem
$$x^2 - ax + a.$$

3. Najděte všechny společné kořeny polynomů
$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 9 \quad \text{a} \quad x^4 - 3x^2 + 4x - 3.$$

4. Vypočtěte povrch a objem kvádru, jehož rozměry jsou kořeny rovnice
$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

5. Určete hodnotu reálného parametru k a všechny kořeny rovnice
$$x^5 - 9x^4 + kx^3 - 3x^2 - \frac{92}{3}x + 20 = 0,$$
víte-li, že $x_1 = -x_2$.

6. Nechť x_1, x_2, x_3 značí kořeny polynomu $F(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. Nalezněte polynom $G(y)$, pro jehož kořeny y_1, y_2, y_3 platí
$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y_3 = \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

7. Najděte největšího společného dělitele polynomů
$$x^4 - 15x^2 - 16, \quad x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \quad \text{a} \quad x^3 - 2x^2 - 8x.$$

8. Nechť je dán polynom
$$F(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9.$$
Užitím Euklidova algoritmu nalezněte (F, F') a najděte polynom G, který má stejné kořeny jako F, ale všechny pouze jednoduché.

9. Najděte všechny body, v nichž má polynom
$$F(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6x + 7$$
tečnu rovnoběžnou s osou x.

10. Najděte všechny racionální kořeny polynomů
$$P_1(x) = 4x^5 + 8x^4 - 15x^3 - 25x^2 + 16x + 12,$$
$$P_2(x) = 6x^6 - 11x^5 - 30x^4 + 26x^3 + 58x^2 + 9x - 10,$$
$$P_3(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 14x + 20.$$

11. Určete počet reálných kořenů polynomů

$$P_1(x) = x^3 + x - 5,$$
$$P_2(x) = x^3 - 5x + 1.$$

Své tvrzení zdůvodněte. Jednotlivé kořeny určete s přesností na dvě desetinná místa metodou půlení intervalu.

12. Zjednodušte

$$3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{15}} \cdot 3^{\frac{2}{35}} \cdot \ldots \cdot 3^{\frac{2}{4n^2-1}} \cdot \ldots$$

13. V $\mathbb{C}$ vyřešte následující rovnice

$$2x^5 - x^4 - 8x + 4 = 0,$$
$$x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 18x^2 + 9x + 27 = 0,$$
$$x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 27x + 18 = 0.$$

14. Upravte předpisy funkcí

$$f_1 : y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 5x^2 + 7x + 3},$$
$$f_2 : y = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 4}{2x^3 + 7x^2 + 11x + 4}$$

do nejjednoduššího možného tvaru, stanovte jejich definiční obory, obory hodnot a načrtněte jejich grafy. V nich vyznačte důležité body včetně průsečíků se souřadnicovými osami.

15. Následující funkce rozložte na parciální zlomky

$$f_1 : y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 - x^2},$$
$$f_2 : y = \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 2x^2 + x},$$
$$f_3 : y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2\,(x^2 + 2)}.$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 91. V kapitole *Reciproké a binomické rovnice* naleznete množství úloh ke cvičení - každý dle své individuální potřeby.