

10. Goniometrické a cyklometrické funkce, rovnice a nerovnice - úlohy k procvičení

1. Definujte funkci $f : y = \operatorname{tg} x$, načrtněte její graf a popište její vlastnosti (definiční obor a obor hodnot, parita, periodičita, intervaly monotonie, extrémy). Vysvětlete, zda k funkci f existuje bez jakéhokoliv omezení inverzní funkce f^{-1} , případně zformulujte podmínku, která existenci inverzní funkce f^{-1} zajistí. Do jednoho obrázku pak načrtněte grafy funkcí f a f^{-1} .
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy následujících funkcí

$$f_1 : y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f_2 : y = \cos x,$$

$$f_3 : y = \cos 2x,$$

$$f_4 : y = \cos \frac{x}{4}.$$

Vyznačte v něm důležité body a určete průsečíky jednotlivých grafů se souřadnicovými osami.

3. Určete definiční obory následujících funkcí

$$f_1 : y = \sqrt{1 - 2 \sin(x + \pi)},$$

$$f_2 : y = 2 \log_{\frac{1}{9}} \cotg \frac{x}{2},$$

$$f_3 : y = \arcsin(2x + 1),$$

$$f_4 : y = \ln \operatorname{arccotg} \arccos \frac{x}{3},$$

$$f_5 : y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3 - \frac{\pi}{4}}.$$

4. Načrtněte grafy následujících funkcí

$$f_1 : y = 2 |\sin(-2x + \pi)|,$$

$$f_2 : y = -3 \cos x + 1,$$

$$f_3 : y = \cos(-x) \sin x - 2,$$

$$f_4 : y = -\frac{1}{2} \arccos\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$f_5 : y = 3 \operatorname{arctg} |2x|.$$

Vyznačte v nich důležité body, určete jejich definiční obory a obory hodnot.

5. Zderivujte funkci

$$f : y = (\sin 2x)^{\cos^2 x}$$

a výsledek upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

6. Vypočtěte limity

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\tan x},$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{2 \sin^2 x + 2x \sin 2x}.$$

7. Vyřešte v $\mathbb{R}$ nerovnice

a)

$$2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 > 0,$$

b)

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x > 1,$$

c)

$$\sin x + \cos 2x \geq 1,$$

d)

$$\cos x \leq \frac{1}{\cos x},$$

e)

$$\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2,$$

f)

$$2^{\cos x \sin x} \geq \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

g)

$$\operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{1 - \cos 2x} - \frac{2}{\sin 2x} \geq \operatorname{cotg} x,$$

h)

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x > \frac{2}{\sqrt{3}},$$

i)

$$\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots < 1 + \cos x.$$

Další úlohy ve Sbírce úloh z matematiky pro gymnasia od str. 416, zejména úlohy č. 60 - 70, 80, 85 - 87, 91, 92. Největší pozornost věnujte kapitole *Goniometrické rovnice* od str. 439, kde naleznete množství úloh ke cvičení - každý dle své individuální potřeby.