

Příklad 1. Necht $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{\square, \star, \circ\}$. Určete

1. počet zobrazení A do B ,
2. počet injektivních zobrazení A do B ,
3. počet zobrazení A do C ,
4. počet zobrazení C do A ,
5. počet injektivních (prostých) zobrazení C do A ,
6. počet surjektivních zobrazení A na C .

Příklad 2. Uvažme dvě konečné množiny A, B . Určete

1. počet různých zobrazení A do B ,
2. počet různých injektivních (prostých) zobrazení A do B ,

v závislosti na počtu prvků $|A|, |B|$ množin A, B .

Příklad 3. Necht jsou dány konečné množiny X, Y a zobrazení $f: X \rightarrow Y$. Obrazem množiny X ve zobrazení f rozumíme množinu

$$\text{Im } f = \{y \in Y \mid \exists x: f(x) = y\}.$$

Uvažme všechna možná zobrazení $X \rightarrow Y$. Vypočtěte

1. počet různých obrazů, je-li $|X| = 7$, $|Y| = 7$,
2. počet různých obrazů, je-li $|X| = 7$, $|Y| = 5$,
3. počet různých obrazů, je-li $|X| = 5$, $|Y| = 7$.

Příklad 4. Předpokládejme, že heslo se skládá z velkých či malých písmen anglické abecedy, čísel a speciálních znaků $+, -, *, /, =, _$. Spočtěte, kolik existuje hesel

1. délky 8,
2. délky 8 obsahujících alespoň jedno velké písmeno,
3. délky 8 obsahujících alespoň jeden speciální znak,
4. délky 8 obsahujících dvě malá písmena, dvě velká písmena, dvě čísla a dva speciální znaky,
5. délky 16 obsahujících právě dva speciální znaky.

Písmen anglické abecedy je 26.

Příklad 5. Uvažujme hod dvěma stejnými šestistěnnými kostkami.

1. Kolik existuje různých hodů?
2. Kolik existuje různých hodů takových, že na obou kostkách nepadne stejné číslo?
3. Kolik existuje různých hodů takových, že na kostkách nepadnou sousední čísla (tj. například 2 a 3)?

Řešení 1.

1. 5^5

2. $5!$

3. 3^5

4. 5^3

5. 60

6. 150

Řešení 2.

1. b^a ,

2. $\binom{b}{a} \cdot a!$.

Řešení 3.

1. $2^7 - 1$,

2. $2^5 - 1$,

3. $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \cdots + \binom{7}{5} = 119$.

Řešení 4.

1. $68^8 \approx 4,57 \cdot 10^{14}$,

2. $68^8 - 42^8 \approx 4,47 \cdot 10^{14}$,

3. $68^8 - 62^8 \approx 2,39 \cdot 10^{14}$,

4. $26^2 \cdot 26^2 \cdot 10^2 \cdot 6^2 \cdot \frac{8!}{2^4} \approx 4,15 \cdot 10^{12}$,

5. $\binom{16}{2} \cdot 62^{14} \cdot 6^2 \approx 5,36 \cdot 10^{28}$.

Řešení 5.

1. 21,

2. 15,

3. 16.

Příklad 6. Uvažujme hod dvěma různobarevnými šestistěnnými kostkami. Hodem rozumíme uspořádanou dvojici hodů jednotlivých kostek.

1. Kolik existuje různých hodů?
2. Kolik existuje různých hodů takových, že na obou kostkách nepadne stejné číslo?
3. Kolik existuje různých hodů takových, že na kostkách nepadnou sousední čísla (tj. například $(2, 3), (3, 2), \dots$)?

Příklad 7. Uvažme klasický PIN jakožto čtyřmístné číslo. Určete,

1. kolik existuje různých PINů,
2. kolik existuje PINů, ve kterých se neopakují čísla,
3. kolik existuje PINů, ve kterých jsou použity alespoň tři různé cifry,
4. kolik existuje PINů, ve kterých je použita nula.

Příklad 8. Určete, kolik různých slov (posloupností písmen) může vzniknout přeuspořádáním písmen slova

1. mississippi,
2. popocatepetl,
3. onomatopoeie.

Příklad 9. Lenka si chce vybrat oblečení na koncert. Vybírá si tričko, sukni a boty. Tričko má modré, zelené, červené, růžové, žluté a bílé. Sukni má černou, žlutou, červenou a růžovou. Boty má bílé, růžové a černé. Kolik různých variant oblečení si Lenka může obléct, jestliže

1. nechce být oblečena jen do jedné barvy,
2. růžové boty si vezme jen k růžovému tričku,
3. nechce kombinovat bílou a žlutou,
4. černou si vezme jen v případě, že bude mít na sobě i bílou.

Příklad 10. Lokomotiva vlaku utáhne maximálně 20 vagonů. Vagony jsou dvojího typu. Obvyčejné nebo nákladní. Vždy jsou hned za lokomotivou všechny vagony obvyčejné, a pak nákladní. Označme O počet obvyčejných vagonů a N počet nákladních vagonů. Kolik různých možností zapojení vagonů existuje, jestliže

1. lokomotiva táhne maximální počet dvaceti vagonů (tj. $20 = O + N \geq 0$),
2. lokomotiva táhne méně než dvacet vagonů (tj. $20 > O + N \geq 0$),
3. $O > N \geq 0$?

Řešení 6.

1. 36,

2. 30,

3. $2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 26$.

Řešení 7.

1. 10^4 ,

2. $\frac{10!}{6!} = 5040$,

3. $\frac{10!}{6!} + 10 \cdot \binom{9}{2} \cdot \frac{4!}{2} = 9360$,

4. $10^4 - 9^4 = 3439$.

Řešení 8.

1. $\frac{11!}{(4!)^2 \cdot 2!} = 34\,650$,

2. $\frac{12!}{3! \cdot (2!)^3} = 9\,979\,200$,

3. $\frac{11!}{4!} = 1\,663\,200$.

Řešení 9.

1. 71,

2. 52,

3. 61,

4. 47.

Řešení 10.

1. 21,

2. $\binom{21}{2} = 210$,

3. $\frac{\binom{22}{2} - 11}{2} = 110$.

Příklad 11. V obchodě mají 5 (různých) obrazů hor, 3 obrazy moře a 12 obrazů památek. Určete, kolik máme možností, chceme-li nakoupit

1. 7 obrazů,
2. 7 obrazů pro 7 přátel,
3. všechny obrazy a rozmístit je v galerii,
4. 10 různých obrazů, z toho 3 obrazy památek.

Příklad 12. Uvažujme hru Macháček, kde přehodit soupeřův hod znamená hodit alespoň tolik, kolik hodil soupeř.

1. Jaká je pravděpodobnost hození Macháčka?
2. Jaká je pravděpodobnost přehození hodu 51?
3. Který hod má právě $\frac{1}{2}$ pravděpodobnost přehození?
4. Který hod má právě $\frac{1}{3}$ pravděpodobnost přehození?
5. Jaká je pravděpodobnost toho, že dva hráči po sobě hodí stejný hod?
6. Jaká je pravděpodobnost toho, že tři hráči po sobě hodí stejný hod?

Příklad 13. Určete pravděpodobnost, že při náhodném výběru pěti karet z klasického balíčku (tj. 52 karet) vytáhneme

1. čtveřici,
2. právě jednu dvojici (tj. ne trojici ani dvě dvojice atd.),
3. alespoň jednu dvojici (tj. může být i trojice atd.),
4. postupku jedné barvy,
5. postupku (může být namixovaná z více barev).

Řešení 11.

1. $\binom{20}{7} = 77\,520,$

2. $\frac{20!}{13!} = 390\,700\,800,$

3. $20!,$

4. $8 \cdot \binom{12}{3} = 1\,760.$

Řešení 12.

1. $\frac{1}{18},$

2. $\frac{13}{18},$

3. $61,$

4. $64,$

5. $\frac{11}{216},$

6. $\frac{7}{2592}.$

Řešení 13.

1. $\frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}},$

2. $\frac{\binom{13}{4} \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}},$

3. $\frac{\binom{52}{5} - \binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}},$

4. $\frac{9 \cdot 4}{\binom{52}{5}},$

5. $\frac{9 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}.$