

Odvodme vzorec pro tzv. *předlhuční dlouhodobé spoření*. Jedná se o situaci, kdy úložky (vklady) velikosti x jsou na začátku každého z n úrokových období při neměnné úrokové sazbě i (je-li úroková sazba 5%, pak $i = 0,05$). Jakékoli zdanění ignorujeme.

úložka	úročí se ... úrokových období	hodnota úložky při ukončení spoření
1.	n	$x \cdot (1+i)^n$
2.	n-1	$x \cdot (1+i)^{n-1}$
3.	n-2	$x \cdot (1+i)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$x \cdot (1+i)$

Celkově tedy naspoříme

$$S = x \cdot (1+i)^n + x \cdot (1+i)^{n-1} + \dots + x \cdot (1+i) = x \cdot [(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n],$$

což lze díky vzorci pro součet geometrické řady vyjádřit jako

$$S = x \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Příklad. Stejným způsobem jako výše odvodte vzorec pro úvěry. Předpokládejme, že

- Na začátku si půjčíme částku D .
- Splácí se po dobu n úrokových období.
- Splátky jsou všechny o velikosti x .
- Je dána neměnná úroková sazba i .

Řešení. Sestavme si pomocnou tabulku.

splátka	hodnota úložky vzhledem k začátku úvěru
1.	$x \cdot (1+i)^{-1}$
2.	$x \cdot (1+i)^{-2}$
3.	$x \cdot (1+i)^{-3}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$x \cdot (1+i)^{-n}$

Platí

$$D = x \cdot (1+i)^{-1} + x \cdot (1+i)^{-2} + \dots + x \cdot (1+i)^{-n} = x \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+i} \right)^n \right].$$

Sečteme geometrickou řadu

$$\frac{1}{1+i} + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n}{i},$$

což dá řešení

$$D = x \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n}{i}$$

□

Příklad. Pan Spořivý se rozhodl, že začne spořit. Po dobu deseti let vkládá pravidelně na začátku každého roku na účet 15 000 korun. Úroková míra je 1,1% p.a. (per annum = ročně). Úroky se připisují jedenkrát ročně, a to na konci roku.

1. Spočtete s přesností na koruny, kolik má při dani 15% ze zisku pan Spořivý na účtu na konci desátého roku.
2. Pokud na konci desátého roku vybere 100 000 korun a zbylou částku nechá úročit, kolik bude mít na účtu na konci dvacátého roku? Vyjádřete opět s přesností na koruny.

Řešení. 1. Dosadíme do vzorce pro spoření $S = x \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, kde $x = 15\,000$, $n = 10$ a $i = 0,011 \cdot 0,85$.

$$S = 15\,000 \cdot 1,00935 \cdot \frac{1,00935^{10} - 1}{0,00935} \doteq 157\,934$$

2. Z částky uvedené výše stačí odebrat 100 000 korun a vynásobit $1,00935^{10}$, dostáváme tedy

$$S = \left(15\,000 \cdot 1,00935 \cdot \frac{1,00935^{10} - 1}{0,00935} - 100\,000 \right) \cdot 1,00935^{10} \doteq 63\,585.$$

□

Příklad. Pan Skrblík se rozhodl, že investuje 1 000 000 korun do zlata, diamantů a ropy. Po pěti letech tyto suroviny prodal, přitom jejich hodnota se v čase měnila takto:

- Zlato zvyšovalo svou cenu po celou dobu o 1% každý měsíc.
- Diamanty zvyšovaly svou hodnotu po celou dobu rychlostí 12,5% za rok.
- Ropa snižovala svou hodnotu o $\frac{1}{9}$ každý rok.

Vypočítejte

1. Spočtete zisk pana Skrblíka, jestliže investoval 300 000 do zlata, 300 000 do diamantů a 400 000 do ropy. Výsledek zaokrouhlete na celé koruny.
2. Určete, zda je pro pana Skrblíka výhodnější investovat do zlata či diamantů. Určete s přesností na koruny rozdíl zisků, které by pan Skrblík získal investováním celého milionu korun do zlata místo do diamantů.
3. Předpokládejme, že pan Skrblík investoval celý milion do ropy. Po pěti letech se rozhodl, že peníze, které se mu vrátily (protože ropa snižovala hodnotu, je tato částka menší než milion), investuje na dalších pět let do diamantů. Předpokládejte, že diamanty budou stále nabývat na ceně rychlostí 12,5% za rok. Kolik korun se mu vrátí po deseti letech?
4. Předpokládejte, že pan Skrblík investoval celou částku pouze do zlata a ropy. Kolik korun musel investovat do zlata, aby jeho zisk (ze zlata) pokryl jeho ztrátu (z ropy)?
5. Jak rychle (v %) by musela snižovat ropa svou hodnotu (za rok), aby byl při investici 500 000 korun do diamantů a stejné investici do ropy jeho zisk nulový? Výsledek zaokrouhlete na setiny.

Daň ze zisku neuvažujte.

Řešení. 1. Zisk pana Skrblíka bude

$$\underbrace{300\,000 \cdot 1,01^{5 \cdot 12}}_{\text{zlato po 60 měsících}} + \underbrace{300\,000 \cdot 1,125^5}_{\text{diamanty po pěti letech}} + \underbrace{400\,000 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^5}_{\text{ropa po pěti letech}} - \underbrace{1\,000\,000}_{\text{vklad}} = \underbrace{307\,590}_{\text{zisk}}$$

2. Protože $1,01^{12} > 1,125$, je zlato výhodnější investice. Rozdíl zisků je

$$1\,000\,000 \cdot 1,01^{5 \cdot 12} - 1\,000\,000 \cdot 1,125^5 = 14\,664.$$

3. Vráť se mu zpátky opět milion korun, protože

$$1\,000\,000 \cdot 1,125^5 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^5 = 1\,000\,000.$$

4. Označme x počet korun, které by pan Skrblík musel investovat do zlata. Aby jeho zisk byl nulový, musí platit

$$\underbrace{x \cdot 1,01^{5 \cdot 12}}_{\text{zlato po pěti letech}} + \underbrace{(1\,000\,000 - x) \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^5}_{\text{ropa po pěti letech}} = \underbrace{1\,000\,000}_{\text{vklad}}.$$

To dává výsledek asi 352 736,108 korun. Pak Skrblík tedy musí investovat alespoň 352 737 korun do zlata.

5. Označme y částku, kterou obdržíme po roce při investici jedné koruny do ropy.

$$\begin{aligned} 500\,000 \cdot 1,125^5 + 500\,000 \cdot y^5 &= 1\,000\,000 \\ y^5 &= \frac{1\,000\,000 - 500\,000 \cdot 1,125^5}{500\,000} = 2 - 1,125^5 \\ y &\doteq 0,7233 \end{aligned}$$

Ropa by musela ztrácet na ceně rychlostí 27,67% za rok.

□