

Příklad. Necht' je dána kvadratická funkce

$$f(x) = 8x^2 - 24x - 6.$$

Nalezněte vrchol paraboly zadané funkcí f . Určete, ve kterém bodě nabývá funkce f minima a určete dále toto minimum.

Řešení 1. Úlohu budeme řešit pomocí doplnění na čtverec. Využijeme přitom vztahu

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right],$$

který však budeme odvozovat pro naše zadání po jednotlivých krocích.

$$\begin{aligned} 8x^2 - 24x - 6 &= 8 \cdot \left(x^2 - 3x - \frac{3}{4} \right) \\ &= 8 \cdot \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} \right] \\ &= 8 \cdot \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - 3 \right] \\ &= 8 \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - 24 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy rovnici

$$y - (-24) = 8 \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)^2.$$

Vrchol paraboly je tedy bod

$$V = \left[\frac{3}{2}, -24 \right].$$

Funkce f nabývá minima v bodě $x_0 = \frac{3}{2}$ a toto minimum je rovno $y_0 = -24$. □

Řešení 2. Stejnou úlohu budeme nyní řešit pomocí derivací. Uvažme derivaci funkce f

$$f'(x) = 16x - 24$$

a položme ji rovnu nule (hledáme extrém). Dostáváme

$$x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}.$$

Minima funkce nabývá v bodě $x_0 = \frac{3}{2}$. Nyní tuto hodnotu dosadíme do funkce f , abychom zjistili hodnotu tohoto minima:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 24 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 18 - 36 - 6 = -24.$$

Dostáváme tedy, že $y_0 = -24$. Vrchol paraboly je tedy

$$V = [x_0, y_0] = \left[\frac{3}{2}, -24 \right].$$

□

Poznámka. Uvažme výraz

$$4x^2 + 4x + 5,$$

který budeme chtít doplnit na čtverec. Můžeme jej upravit do tvarů

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 5 &= 4 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right], \\ &= 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 4, \\ &= (2x + 1)^2 + 4. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že doplněním na čtverec budeme rozumět druhý tvar. Důvodem je, že tento tvar nám o funkci prozradí nejvíce.

Příklad. *Doplňte na čtverec.*

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 5 \\ x^2 + 6x - 3 \\ 4x^2 - 24x + 15 \\ 3x^2 - 12x - 5 \\ x^2 + 5x + \frac{1}{4} \\ x^2 - x + 2 \\ -7x^2 + 4x - \frac{4}{7} \\ 5x^2 + 3x + \frac{29}{20} \end{aligned}$$

Určete navíc vrcholy u parabol zadanými rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 6x - 3, \\ y &= 5x^2 + 3x + \frac{29}{20}. \end{aligned}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 5 &= (x + 4)^2 - 21 \\ x^2 + 6x - 3 &= (x + 3)^2 - 12 & V &= [-3, -12] \\ 4x^2 - 24x + 15 &= 4(x - 3)^2 - 21 \\ 3x^2 - 12x - 5 &= 3(x - 2)^2 - 17 \\ x^2 + 5x + \frac{1}{4} &= \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - 6 \\ x^2 - x + 2 &= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \\ -7x^2 + 4x - \frac{4}{7} &= -7 \left(x - \frac{2}{7} \right)^2 \\ 5x^2 + 3x + \frac{29}{20} &= 5 \left(x + \frac{3}{10} \right)^2 + 1 & V &= \left[-\frac{3}{10}, 1 \right] \end{aligned}$$

□