

Definice. Řekneme, že k -rovina K a l -rovina L se protínají *transverzálně* v $\mathbb{P}^n$, jestliže jejich průnik je $(k + l - n)$ -rovina.

Příklad. Ukažte, že obecná dvojice $(K, L) \in \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n)$ se protíná *transverzálně*.

Řešení. Chceme tedy ukázat, že množina dvojic (K, L) protínající se *transverzálně* obsahuje otevřenou hustou podmnožinu $\mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{G}(l, n)$. Protože $\mathbb{G}(k, n)$ i $\mathbb{G}(l, n)$ jsou ireducibilní variety, je i jejich součin ireducibilní varieta, platí otevřená hustá = otevřená neprázdná.

Ukažme tedy, že množina dvojic, které se *neprotínají* *transverzálně*, leží v nějaké varietě, tj. množině, kterou lze popsat rovnicemi. Nechť tedy $k, l \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ jsou libovolná taková, že $k + l \geq n$. Projektivní k -rovina je dána $(k + 1)$ -ticí lineárně nezávislých vektorů, podobně l -rovina je dána $(l + 1)$ -ticí vektorů. Můžeme tedy uvažovat vyjádření

$$K = [v_0, v_1, \dots, v_k], \quad L = [u_0, u_1, \dots, u_l].$$

Protože v projektivním prostoru dimenze n existuje právě $n + 1$ lineárně nezávislých vektorů, je průnik K a L dán vždy alespoň

$$\underbrace{(k + 1)}_{\text{gen. } K} + \underbrace{(l + 1)}_{\text{gen. } L} - \underbrace{(n + 1)}_{\text{gen. } \mathbb{P}^n} = k + l - n + 1$$

vektory, tj. $K \cap L$ má dimenzi alespoň $k + l - n$. Chceme sestavit soustavu rovnic, která bude nulová, pokud je tato dimenze vyšší (a která nebude popisovat celý prostor $\mathbb{P}^n$).

Označme $\mathbb{S}$ množinu všech permutací množiny $\{0, 1, \dots, l\}$ a uvažme systém rovnic daný

$$v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(n-k)} = 0 \quad \sigma \in \mathbb{S}.$$

Je-li dimenze $K \cap L$ vyšší, než $k + l - n$, pak generátory těchto nadrovin negenerují celý prostor $\mathbb{P}^n$, a proto pro libovolnou permutaci $\sigma \in \mathbb{S}$ je rovnost výše splněna (vždyť máme $n + 1$ vektorů, které jsou nutně lineárně závislé).

Tento systém zadává varietu, která obsahuje všechny dvojice, které se *neprotnou* *transverzálně*. Zbývá ukázat, že komplement (otevřená množina) je neprázdný. Uvažme například

$$\bar{K} = [e_0, e_1, \dots, e_{k+l-n}, e_{k+l-n+1}, \dots, e_k], \quad \bar{L} = [e_0, e_1, \dots, e_{k+l-n}, e_{k+1}, \dots, e_n].$$

Jistě pro vhodnou permutaci σ je příslušný vnější součet nenulový, dvojice $(\bar{K}, \bar{L})$ neleží ve výše zkonstruované varietě. Otevřená množina *transverzálně* se protínajících dvojic je neprázdná, tedy hustá, což jsme chtěli dokázat. $\square$