

Definice. Zobrazení $f: V \rightarrow W$ mezi kvaziprojektivními varietami se nazývá *regulární*, jestliže pro každý bod $P \in V$ existují homogenní polynomy $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{K}^d[x_0, \dots, x_m]$ téhož stupně d tak, že platí $f = (f_0 : \dots : f_n)$ na nějakém okolí bodu $P \in V$.

Lemma 1. *Vlastní uzavřené podmnožiny $\mathbb{A}^1$ a $\mathbb{P}^1$ v Zariského topologiích jsou konečné.*

Důkaz. Pro afinní zřejmé, vždyť varieta je dána ideálem a každý ideál je generovaný konečně mnoha polynomy. Každý nenulový polynom je nulový jen v konečně mnoha bodech.

Nechť máme nekonečnou projektivní varietu V . Ta je dána nějakým ideálem J , který je generován homogenními polynomy. Částečným dosazením $x_1 = 1$ do těchto generátorů obdržíme ideál I generující nekonečnou afinní varietu, tedy $\mathbb{A}^1$. Varieta V proto obsahuje $\mathbb{A}^1$. Podle věty 13.9 není $\mathbb{A}^1$ projektivní varieta, proto $V = \mathbb{P}^1$. $\square$

Příklad. *Dokažte, že obraz regulárního zobrazení $f: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^n$ je uzavřený. (Tedy $f(\mathbb{A}^1) \subseteq \mathbb{A}^n$ je varieta v $\mathbb{A}^n$).*

Řešení. Víme, že $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^n$ jsou kvaziprojektivní variety. Ukažme, že f lze rozšířit na regulární zobrazení $\hat{f}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Protože $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{A}^1 = \{(0 : 1)\}$, chceme ukázat, jak dopadne $f((0 : 1))$. Nechť $P \in \mathbb{A}^1$ je libovolný bod, pak máme vyjádření $f = (f_0 : \dots : f_n)$. Všechny polynomy $f_0, \dots, f_n$ jsou homogenní stejného stupně d . Buď $e \in \mathbb{N}_0$ nejvyšší mocnina x_0 dělící každý z polynomů $f_0, \dots, f_n$. Označme $g_i = \frac{f_i}{x_0^e}$. Jistě

$$(f_0(p_0, p_1) : \dots : f_n(p_0, p_1)) = (g_0(p_0, p_1) : \dots : g_n(p_0, p_1)),$$

pro libovolný bod $(p_0, p_1) \in \mathbb{A}^1$, kde je levá (a tedy i pravá) strana definovaná. Přitom platí, že existuje j takové, že $x_0 \nmid g_j$ (tak jsme polynomy g_i konstruovali). Pak ale $g_j(0, 1) \neq 0$ (výsledek je nenulový koeficient u členu x_1^{d-e}). Jistě je $(g_0 : \dots : g_n)$ definované na kokonečné (a tedy otevřené) množině obsahující $(0 : 1)$. Rozšířili jsme tedy regulární zobrazení $f: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^n$ na regulární zobrazení $\hat{f}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Z věty 13.7 víme, že obraz projektivní variety v regulárním zobrazení je uzavřený, tedy $\hat{f}(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^n$ je projektivní varieta.

Je-li $\hat{f}((0 : 1))$ vlastní bod, je $\hat{f}(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{A}^n$ podle věty 13.9 konečná množina. Jistě je též $f(\mathbb{A}^1) \subseteq \hat{f}(\mathbb{P}^1)$ konečná množina, tedy afinní varieta, zejména uzavřená množina v $\mathbb{A}^n$.

Je-li naopak $\hat{f}((0 : 1))$ nevlastní bod, je $\hat{f}(\mathbb{P}^1)$ projektivní varieta daná nějakým homogenním ideálem $J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Množina bodů nulujících se na polynomech ideálu $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, který dostaneme z ideálu J dosazením $x_0 = 1$, je $f(\mathbb{A}^1)$. Tedy $f(\mathbb{A}^1)$ je varieta, zejména tedy uzavřená podmnožina $\mathbb{A}^n$. $\square$