

Definice.

- Řekneme, že zobrazení $f: V \dashrightarrow W$ je *dominantní*, jestliže $\text{im } f \subseteq W$ je hustá podmnožina.
- Řekneme, že dominantní zobrazení $f: V \dashrightarrow W$ je *biracionální ekvivalence*, jestliže existuje dominantní zobrazení $g: W \dashrightarrow V$ takové, že $gf = \text{id}_V$ a $fg = \text{id}_W$.

Příklad. Uvažme zobrazení

$$\begin{aligned} f: \quad \quad \quad \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2, \\ f: (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1). \end{aligned}$$

Ukažte, že f je biracionální ekvivalence a najděte otevřenou podmnožinu, kde je f izomorfismus.

Řešení. Protože je $\mathbb{P}^2$ ireducibilní, je každá neprázdная otevřená podmnožina $\mathbb{P}^2$ hustá. Abychom ukázali, že f je dominantní, postačí, že obraz f obsahuje neprázdную otevřenou podmnožinu. Uvažme

$$U = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_0x_1x_2 \neq 0\}.$$

Jistě je U neprázdная otevřená podmnožina $\mathbb{P}^2$. Přitom libovolný bod $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$ leží v $\text{im } f$, vždyť

$$f(x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) = (x_0(x_0x_1x_2) : x_1(x_0x_1x_2) : x_2(x_0x_1x_2)) = (x_0 : x_1 : x_2).$$

Položme v definici biracionální ekvivalence $g = f$, pak totiž

$$(f \circ f)(x_0 : x_1 : x_2) = f(x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) = (x_0 : x_1 : x_2),$$

pro $x_0x_1x_2 \neq 0$, tedy $ff = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$. Zřejmě navíc platí, že f je izomorfismus právě na množině U . $\square$