

Uvažujeme projektivní prostor dimenze n nad algebraicky uzavřeným tělesem $\mathbb{K}$

$$\mathbb{P}^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\},$$

pak afinní prostor dimenze n lze chápat jako podmnožina $\mathbb{P}^n$

$$\mathbb{A}^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 1\}.$$

Na $\mathbb{A}^n$ máme definovaný pojem afinní variety (tu lze zadat například množinou polynomů v $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, speciálně ideálem), na $\mathbb{P}^n$ máme definovaný pojem projektivní variety (ta je dána množinou homogenních polynomů v $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ nebo homogenním ideálem). Uvažme Zariského topologi na $\mathbb{P}^n$, kde uzavřené množiny jsou právě projektivní variety. Afinní varietu lze chápat jako množinu bodů projektivního prostoru, vždyť $V \subseteq \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$. Platí

$$\overline{V^{af}(I)} = V^{pr}(\tilde{I}),$$

kde $\tilde{I} = (\tilde{g} \mid g \in I)$, přičemž $\tilde{g} = x_0^{\deg g} g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.

Příklad. Zvolte vhodná uspořádání monomů na $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ a na $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ a dokažte, že pokud je množina polynomů $g_1, g_2, \dots, g_n$ Gröbnerova báze ideálu I , pak $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n$ je Gröbnerova báze ideálu $\tilde{I}$, zejména pak

$$\overline{V^{af}(g_1, \dots, g_n)} = \overline{V^{af}(I)} = V^{pr}(\tilde{I}) = V^{pr}(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n).$$

Lemma 1. Necht $\mathbb{K}$ je algebraicky uzavřené těleso, $n \in \mathbb{N}$ a necht $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ je ideál. Pro libovolné $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ platí, že $f \in \text{LT } I$ právě tehdy, když každý člen f leží v $\text{LT } I$.

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “: Necht $f \in \text{LT } I$. Pak existují monomy $q_1, \dots, q_m \in \text{LT } I$ (vždyť takovými prvky je ideál $\text{LT } I$ generován) a polynomy $p_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ takové, že

$$f = \sum_{i=1}^m q_i p_i.$$

Necht f_j je libovolný člen polynomu f . Zřejmě každý člen $p_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, můžeme proto uvážit jen ty sčítance $\sum_{i=1}^m q_i p_i$, které přispívají k f_j (tj. až na násobení nějakou jednotkou jsou rovny f_j). Ty jistě padnou do $\text{LT } I$, vždyť q_i jsou monomy. Proto taky $f_j \in \text{LT } I$. Nutně tedy každý člen polynomu f je v $\text{LT } I$.

„ $\Leftarrow$ “: Zřejmé. □

Lemma 2. Označme $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ a $\tilde{A} = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Definujme

$$\begin{aligned} \varphi: \tilde{A} &\rightarrow A, \\ \varphi: s &\mapsto s(1, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Necht máme zadaná uspořádání na polynomech taková, že pro libovolný polynom $r \in A$ a libovolný homogenní polynom $s \in \tilde{A}$ platí

$$\begin{aligned} \text{LM } r &= \text{LM } \tilde{r}, \\ \text{LM } \varphi(s) &= \varphi(\text{LM } s). \end{aligned}$$

Bud $g \in \tilde{A}$ monom a $I \subseteq A$ ideál. Pak $g \in \text{LT } \tilde{I}$ právě tehdy, když $\varphi(g) \in \text{LT } I$.

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “: Buď $g \in \text{LT } \tilde{I}$ monom. Ideál $\text{LT } \tilde{I}$ je generován vedoucími monomy polynomů z $\tilde{I}$. Existují tedy $f_1, \dots, f_m \in \tilde{I}$ a polynomy $p_i \in \tilde{A}$ takové, že

$$g = \sum_{i=1}^m (\text{LM } f_i) \cdot p_i.$$

Přitom protože je g monom, existuje $i \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $f = f_i$ a $\text{LM } f \mid g$. Jistě $\varphi(\text{LM } f) \mid \varphi(g)$. Označme $d = \deg f$. Protože $\tilde{I}$ je homogenní ideál, můžeme psát

$$f = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_d,$$

kde s_i je homogenní polynom stupně i . Přitom $s_i \in \tilde{I}$, vždyť polynom f lze napsat jako $\sum_{i=1}^l \tilde{h}_i \cdot q_i$, kde $h \in I$ jsou homogenní. Omezením se jen na ty členy q_i , které mají stupeň $j - \deg h_i$ dostáváme právě ty sčítance přispívající k s_j . Uvažme polynom $s = s_i$, pro který $\text{LM } f = \text{LM } s$. Protože $s \in \tilde{I}$, platí pro vhodné $t_i \in \tilde{A}$ a $r_i \in I$:

$$s = \sum_{i=1}^k \tilde{r}_i t_i$$

Zobrazení φ je (částečné) dosazení, jedná se o homomorfismus okruhů, který pro $r \in A$ splňuje $\varphi(\tilde{r}) = r$, proto

$$\varphi(s) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k \tilde{r}_i t_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \cdot \varphi(t_i).$$

Odtud $\varphi(s) \in I$, tj. $\text{LM } \varphi(s) \in \text{LT } I$.

$$\text{LM } \varphi(s) = \varphi(\text{LM } s) = \varphi(\text{LM } f) \in \text{LT } I,$$

protože navíc $\varphi(\text{LM } f) \mid \varphi(g)$, je i $\varphi(g) \in \text{LT } I$.

„ $\Leftarrow$ “: Zřejmé, vždyť $h = \varphi(g) \in \text{LT } I$ znamená, že existuje polynom $f \in I$ takový, že $\text{LM } f = h$, přitom $g = h \cdot x_0^a$ pro nějaké $a \in \mathbb{N}_0$. Pak $\tilde{f} \in \tilde{I}$, a tedy $\text{LM } \tilde{f} = \text{LM } f = h \in \text{LT } \tilde{I}$, zejména tedy $g \in \text{LT } \tilde{I}$. $\square$

Řešení. Z věty o existenci Gröbnerovy báze dostáváme, že polynomy $g_1, \dots, g_n \in I$ jejichž vedoucí monomy (v předem daném uspořádání) generují ideál $\text{LT } I$, generují ideál I . Protože budeme přecházet mezi polynomy v $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ a $\tilde{A} = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, je přirozené zvolit uspořádání na polynomech taková, aby byly splněny podmínky z lemmatu 2. Uvažme proto následující dvě uspořádání monomů

- V $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ uvažme uspořádání dané podmínkami (dříve uvedená má vyšší prioritu)
 1. monom většího stupně je větší,
 2. lexikografické uspořádání dané uspořádáním $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.
- V $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ uvažme uspořádání dané postupně podmínkami
 1. monom většího stupně je větší,
 2. monom menšího stupně v x_0 je větší,
 3. lexikografické uspořádání dané uspořádáním $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.

První podmínky zajistí $\text{LM } \tilde{f}$ neobsahuje x_0 , stejné uspořádání na ostatních proměnných pak dá $\text{LM } f = \text{LM } \tilde{f}$. Pro homogenní polynomy $s \in \tilde{A}$ chceme, aby operátor LM komutoval s φ . To spolu s předchozím zajistí právě druhá podmínka na uspořádání v $\tilde{A}$ (pro nehomogenní nic takového platit nemůže, vždyť $\varphi(x_0 - 1) = 0$).

Jistě $\tilde{g}_i \in \tilde{I}$. Chceme ukázat, že tvoří jeho Gröbnerovu bázi, tedy

$$\text{LT } \tilde{I} = (\text{LM } \tilde{g}_1, \dots, \text{LM } \tilde{g}_n).$$

Jistě $\text{LT } \tilde{I} \supseteq (\text{LM } \tilde{g}_1, \dots, \text{LM } \tilde{g}_n)$, stačí tedy ukázat inkluzi $\subseteq$. Buď proto $f \in \text{LT } \tilde{I}$ libovolný. Díky lemmatu 1 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že f je monom. Z lemmatu 2 plyne, že $\varphi(f) \in \text{LT } I = (\text{LM } g_1, \dots, \text{LM } g_n)$. Proto existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $\text{LM } g_i \mid \varphi(f)$. Jistě tedy $\text{LM } g_i = \text{LM } \tilde{g}_i \mid f$, tj. $f \in (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)$. $\square$