

Definice. Afinní varieta V se nazývá ireducibilní, jestliže nelze psát jako sjednocení $V = V_1 \cup V_2$, kde $V_1, V_2 \subset V$ jsou afinní variety.

Lemma. *Nechť V, V_1, V_2 jsou afinní variety a I, I_1, I_2 ideály, pak*

1. *V je ireducibilní právě tehdy, když $V \subseteq V_1 \cup V_2 \Rightarrow V \subseteq V_1$ nebo $V \subseteq V_2$.*
2. *I je prvoideál právě tehdy, když $I \supseteq I_1 \cdot I_2 \Rightarrow I \supseteq I_1$ nebo $I \supseteq I_2$.*

Důkaz. 1. „ $\Rightarrow$ “: Je-li $V \subseteq V_1 \cup V_2$, pak $V = (V_1 \cap V) \cup (V_2 \cap V)$, přitom průnik variet je varieta. Protože V je ireducibilní, platí $V_1 \cap V = V$ nebo $V_2 \cap V = V$, tedy $V \subseteq V_1$ nebo $V \subseteq V_2$, což jsme chtěli ukázat.

„ $\Leftarrow$ “: Sporem předpokládejme, že V není ireducibilní, pak existují $V_1, V_2 \subset V$ takové, že $V = V_1 \cup V_2$. Zejména ale $V \subseteq V_1 \cup V_2$, proto $V \subseteq V_1$ nebo $V \subseteq V_2$, což je spor.

2. „ $\Rightarrow$ “: Je-li I prvoideál obsahující součin ideálů, tak musí obsahovat alespoň jeden z nich. V opačném případě bychom totiž mohli vzít $x \in I_1 \setminus I$ a $y \in I_2 \setminus I$. Pak $xy \in I_1 I_2 \subseteq I$, což je spor s tím, že I je prvoideál.

„ $\Leftarrow$ “: Nechť $xy \in I$, pak $I \supseteq (x) \cdot (y)$. Z předpokladu máme $I \supseteq (x)$ nebo $I \supseteq (y)$, tedy $x \in I$ nebo $y \in I$. Proto je I prvoideál.

Věta. *Nechť V je afinní varieta. V je ireducibilní právě tehdy, když $I(V)$ je prvoideál.*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “: Nechť V je ireducibilní a nechť I_1, I_2 jsou libovolné takové, že $I(V) \supseteq J_1 \cdot J_2$. Dostáváme

$$V = VI(V) \subseteq V(J_1 \cdot J_2) = V(J_1) \cup V(J_2).$$

Z ireducibility V máme $V \subseteq V(J_1)$ nebo $V \subseteq V(J_2)$. Odtud $I(V) \supseteq IV(J_1) = \sqrt{J_1} \supseteq J_1$ nebo $I(V) \supseteq IV(J_2) = \sqrt{J_2} \supseteq J_2$. Tedy $I(V)$ je prvoideál.

„ $\Leftarrow$ “: Buď $I(V)$ prvoideál. Nechť $V \subseteq V_1 \cup V_2$. Pak protože $V_1 + V_2$ je nejmenší ideál obsahující $V_1 \cup V_2$, dostáváme

$$I(V) \supseteq I(V_1 \cup V_2) = I(V_1 + V_2) = I(V_1) \cap I(V_2) \supseteq I(V_1) \cdot I(V_2).$$

Protože $I(V)$ je prvoideál, platí $I(V) \supseteq I(V_1)$ nebo $I(V) \supseteq I(V_2)$, tedy

$$V = VI(V) \subseteq VI(V_1) = V_1 \quad \text{nebo} \quad V = VI(V) \subseteq VI(V_2) = V_2.$$

Dostáváme, že V je ireducibilní, což jsme chtěli dokázat.