

Příklad. Zkoumejte vztah mezi

1. nenulovými kvadratickými polynomy a nadkvadratikami

$$f \mapsto V(f)$$

2. kubickými polynomy f a $V(f)$.

Řešení. 1. Budeme chtít dokázat, že

$$V(f) = V(g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists 0 \neq c \in \mathbb{K}: f = c \cdot g.$$

„ $\Leftarrow$ “: Zřejmé

„ $\Rightarrow$ “: Na $V(f) = V(g)$ aplikujeme zobrazení I a z Hilbertovy věty o nulách dostáváme $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$. Jistě $f \in \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$. Odtud $\exists n \in \mathbb{N}: f^n \in (g)$, tedy $g \mid f^n$. Podobně $f \mid g^m$.

- Pokud f není ireducibilní, pak $f = f_1 \cdot f_2$, kde f_i jsou lineární. Kdyby g bylo ireducibilní, pak $g \mid f_1^n \cdot f_2^n$ implikuje $g \mid f_1$ nebo $g \mid f_2$, ale g má vyšší stupeň než f_1 i f_2 . Proto $g = g_1 \cdot g_2$, kde g_i jsou lineární. Pak

$$g \mid f^n \Rightarrow g_1 \mid f^n \Rightarrow g_1 \mid f_1 \cdot f_2 \xrightarrow{\text{BÚNO}} g_1 \mid f_1.$$

Protože g_1 i f_1 jsou lineární, existuje $c_1 \neq 0$ takové, že $f_1 = c_1 g_1$. Pokud by $g_2 \nmid f_2$, pak $g_2 \mid f_1$, přitom $V(f)$ není ireducibilní a $V(g) = V(g_1)$ je ireducibilní, což je spor. Nutně tedy $g_2 \mid f_2$, existuje proto $c_2 \neq 0$ takové, že $f_2 = c_2 g_2$. Položme $c = c_1 c_2$, pak

$$f = c \cdot g.$$

- Necht f, g jsou ireducibilní, pak $g \mid f^n$ implikuje $g \mid f$. Podobně $f \mid g$, tedy $f \sim g$, tj. existuje $c \neq 0$ takové, že

$$f = c \cdot g.$$

2. Opět platí $f = cg \Rightarrow V(f) = V(g)$. Opačně je situace složitější.

Opět platí, že existují $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$g \mid f^n, \quad f \mid g^m.$$

Je-li f ireducibilní, pak $f \mid g$. Nutně g je ireducibilní, jinak by f dělilo nějaký jeho faktor, který by však měl menší stupeň, což nelze. V takovém případě též $g \mid f$, a tedy $f = cg$ pro nějakou nenulovou konstantu $c \in \mathbb{K}$.

Pokud se f rozkládá na součin tří lineárních polynomů, pak se nutně i g rozkládá na součin tří lineárních polynomů (kdyby byl nějaký ireducibilní faktor většího stupně, dělil by některý z faktorů f , který je lineární, což je spor). Máme tedy $f = f_1 f_2 f_3$, $g = g_1 g_2 g_3$. Opět dostáváme (bez újmy na obecnosti), že

$$f_1 \mid g_1 \Rightarrow f_1 = c g_1.$$

Nyní musíme rozlišit, zda nejsou některé faktory asociované.

- $f_1 \sim f_2 \sim f_3$, pak $V(f_i) = V(f) = V(g) = V(g_i)$, tedy $f_i = c_i g_i$. Celkem $f = cg$.
- Žádná dvojice není asociovaná, pak libovolné sjednocení dvou variet z $V(f_i)$ není ireducibilní, proto též žádné dva polynomy g_i, g_j nejsou asociované pro $i \neq j$. Nutně $f_i = c_i g_i$, tj. $f = cg$.
- Pokud jsme ovšem v situaci, kdy $f = f_1 \cdot f_2^2$, pak pomocí předchozích úvah získáme jen, že $g = cf_1 f_2^2$ nebo $g = cf_1^2 f_2$. Zřejmě pro oba případy nastane $V(f) = V(g)$.

Nechť se f rozkládá na součin lineárního f_1 a ireducibilního kvadratického polynomu f_2 . Pak se nutně i g rozkládá na součin dvou polynomů. Přitom z $f_2 \mid g$ a ireducibility f_2 dostáváme, že g se rozloží také na součin lineárního a ireducibilního kvadratického polynomu. V tomto případě opět dostáváme $f = cg$.