

Příklad 1. Řešte soustavu

$$x^2 + y + z = 1$$

$$x + y^2 + z = 1$$

$$x + y + z^2 = 1$$

pomocí Gröbnerovy báze ideálu $I = (f_1, f_2, f_3)$, kde

$$f_1 = x^2 + y + z - 1$$

$$f_2 = x + y^2 + z - 1$$

$$f_3 = x + y + z^2 - 1$$

Řešení. Pokud bychom počítali nejprve $S(f_1, f_j)$ pro $j \geq 2$, zastavili bychom se až u polynomu f_{12} a pak bychom počítali $S(f_2, f_j)$ a obdrželi bychom další polynomy. Je vidět, že poměrně snadno můžeme obdržet relativně malý (v našem uspořádání $x > y > z$) polynom uvážením $S(f_2, f_3)$. Počítejme proto

$$S(f_2, f_3) = f_2 - f_3 = y^2 - y - z^2 + z, \text{ což dává}$$

$$f_4 = y^2 - y - z^2 + z$$

$S(f_1, f_2) = f_1 - x f_2$ po přičtení $(y^2 + z - 1)f_2$ a $(-y^2 - y - z^2 - z + 1)f_4$ dostáváme

$$f_5 = 2yz^2 + z^4 - z^2$$

$S(f_2, f_4)$ se po přičtení $(-y - z^2 + z)f_2$ a $(-y^2 - z + 1)f_4$ zredukuje na nulu.

$S(f_3, f_4)$ se po přičtení $(-y - z^2 + z)f_3$ a $(-y - z^2 + 1)f_4$ zredukuje na nulu.

$S(f_1, f_3)$ se po přičtení $(y + z^2 - 1)f_2$, $(-y - z^2)f_4$ a $-f_5$ zredukuje na nulu.

$S(f_1, f_4)$ se po přičtení $(-y - z^2 + z)f_1$ a $(-y - z + 1)f_4$ zredukuje na nulu.

$S(f_1, f_5)$ se podobně pomocí polynomů f_1 a f_5 zredukuje na nulu.

Vidíme, že jsou-li vedoucí koeficienty nesoudělné, tak pomocí příslušných polynomů lze $S(f_i, f_j)$ zredukovat na nulu. Zajímavé jsou tedy ty dvojice polynomů, jejichž vedoucí koeficienty nejsou nesoudělné. Taková dvojice zbývá jediná a to f_4, f_5 .

$S(f_4, f_5) = 2z^2 f_4 - y f_5$ což po přičtení $1/2 \cdot (z^2 + 1)f_5$ dá polynom v proměnné z , který je po vynormování tvaru

$$f_6 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2$$

Poslední zajímavý polynom je $S(f_5, f_6)$, tento však po přičtení $(-4z^2 + 4z - 1)f_5 + (-z^2 + 1)f_6$ opět vynulujeme. Dostáváme tedy

$$I = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6),$$

kde tyto polynomy tvoří Gröbnerovu bázi.

Zbývá dořešit soustavu rovnic. Tj. hledáme body (x, y, z) , které nulují všechny polynomy z I . Z posledního polynomu (a symetrie původní soustavy) vidíme, že počet řešení bude

konečný. Snadno též vidíme, že polynom f_6 má dvojnásobný nulový kořen a má jako kořen 1, u kterého snadno uvidíme, že je též dvojnásobný. Dostáváme tedy rozklad

$$f_6 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 = z^2 \cdot (z - 1)^2 \cdot (z^2 + 2z - 1).$$

Kvadratickou rovnici můžeme dořešit standardním způsobem a obdržíme

$$z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

- $z = 0$ nebo $z = 1$, pak dosazením do polynomu f_4 dostáváme, že $y = 0$ nebo $y = 1$. To po dosazení do původní soustavy dá řešení

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

- Vidíme, že po dosazení $z = -1 \pm \sqrt{2}$ do polynomu f_5 dostaneme přímo y .

$$y = \frac{z^2 - z^4}{2z^2} = \frac{1 - (-1 \pm \sqrt{2})^2}{2} = \frac{1 - (3 \mp 2\sqrt{2})}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Konečně dosazením do druhé rovnice vyjádříme x .

$$x = 1 - y^2 - z = 1 - (3 \mp 2\sqrt{2}) - (-1 \pm \sqrt{2}) = 1 - 3 \pm 2\sqrt{2} + 1 \mp \sqrt{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Dostáváme tedy dvě řešení

$$(-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}) \quad \text{a} \quad (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

Soustava má 5 řešení:

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \\ (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}) \quad \text{a} \quad (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$