



**MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**



Matematická liga

Příprava na MO-A

Jaroška

Brno
2014/2015

Pavel Francírek
Jakub Juránek
Dominik Velan

Obsah

1	Geometrie I	3
1.1	Geometrie trojúhelníka	3
1.1.1	Vzorce pro obsahy	3
1.1.2	Těžnice	3
1.1.3	Věty a jejich důsledky	4
1.2	Geometrie čtyřúhelníka	5
1.2.1	Tečnové a tětivové čtyřúhelníky	5
1.3	Soutěžní příklady	6
2	Dělitelnost	13
2.1	Návodné příklady	13
2.2	Soutěžní příklady	18
3	Rovnice a jejich soustavy, nerovnosti	23
3.1	Teorie	23
3.2	Návodné příklady	25
3.3	Soutěžní příklady	30
4	Geometrie II	36
4.1	Teorie	36
4.1.1	Feuerbachova kružnice	36
4.2	Návodné příklady	39
4.3	Soutěžní příklady	39
5	Kombinatorika, pravděpodobnost, invarianty	43
5.1	Teorie	43
5.2	Návodné příklady	45
5.3	Soutěžní příklady	49
6	Invarianty a monovarianty	58
6.1	Teorie	58
6.2	Příklady	58
7	Posloupnosti	65
7.1	Teorie	65
7.1.1	Aritmetická posloupnost	65
7.1.2	Diferenční rovnice	66

7.2	Příklady	67
8	Diofantické rovnice	79
8.1	Teorie	79
8.1.1	Lineární diofantické rovnice	79
8.2	Příklady	81
9	Geometrie III	86
9.1	Příklady	86
10	Závěrečné opakování	96

Kapitola 1

Geometrie I

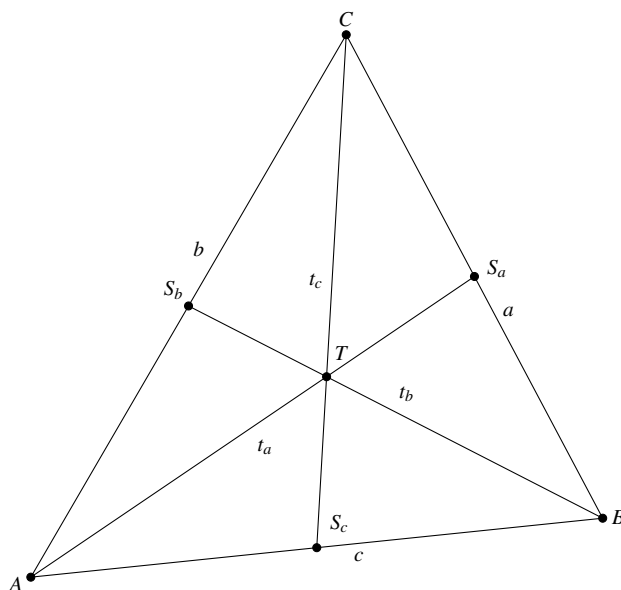
1.1 Geometrie trojúhelníka

1.1.1 Vzorce pro obsahy

Nechť je dán trojúhelník ABC . Označme γ úhel při vrcholu C , r poloměr kružnice opsané, ρ poloměr kružnice vepsané a s poloviční obvod trojúhelníku ($2s = a + b + c$). Pak pro jeho obsah S platí následující formule:

1. $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$,
2. $S = \frac{abc}{4r}$,
3. $S = \rho s$,
4. $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ tzv. *Heronův vzorec*.

1.1.2 Těžnice



Uvažujme trojúhelník ABC , délky jeho těžnic označme obvyklým způsobem t_a, t_b, t_c . Pro jejich vyjádření pomocí velikostí stran platí formule

$$\begin{aligned}t_a &= \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \\t_b &= \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, \\t_c &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.\end{aligned}$$

Pro těžnice platí

$$\frac{|AT|}{|TS_a|} = \frac{|BT|}{|TS_b|} = \frac{|CT|}{|TS_c|} = 2.$$

1.1.3 Věty a jejich důsledky

Věta 1.1 (Sinová věta). Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

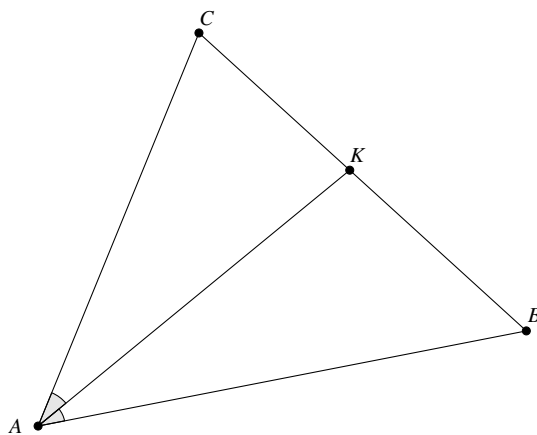
kde r je poloměr kružnice opsané.

Věta 1.2 (Kosinová věta). Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta, \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

Věta 1.3 (Bisector theorem). Necht' je dán trojúhelník ABC . Osa úhlu $\angle BAC$ protíná stranu BC v bodě K . Platí

$$\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Věta 1.4 (Cevova). Necht' ABC je trojúhelník a K, L, M jsou po řadě body ležící na přímkách BC, CA, AB . Přímký AK, BL a CM se protínají ve společném bodě, právě když platí

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$

Důsledek 1.5. Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Tento bod nazýváme *těžištěm*.

Důsledek 1.6. Výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá *ortocentrum*.

Důsledek 1.7. Osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě a tento bod je středem kružnice vepsané.

1.2 Geometrie čtyřúhelníka

1.2.1 Tečnové a tětiové čtyřúhelníky

Definice 1.8. Čtyřúhelník se nazývá *tětiový*, jestliže mu lze opsat kružnici. Čtyřúhelník se nazývá *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici. Čtyřúhelník se nazývá *dvojtředový*, jestliže je současně tětiový i tečnový.

Čtyřúhelník je tětiový, právě když jsou součty protilehlých úhlů shodné (tj. právě když součet dvou protilehlých úhlů je 180°). Čtyřúhelník je tečnový, právě když jsou součty délek jeho protilehlých stran shodné.

Necht' $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník, pak pro jeho obsah S platí tzv. *Brahmaguptův vzorec*:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad \text{kde } 2s = a + b + c + d.$$

Pro S obsah tečnového čtyřúhelníku platí

$$S = \rho s,$$

kde ρ je poloměr vepsané kružnice a $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Je-li čtyřúhelník $ABCD$ dvojtředový, platí pro jeho obsah S

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Věta 1.9 (Ptolemaiova nerovnost). Necht' a, b, c, d jsou v obvyklém označení délky stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a e, f délky jeho úhlopříček. Pak platí

$$ab + bd \geq ef.$$

Rovnost přitom nastává, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový. Tvrzení, že v každém tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnost

$$ab + bd = ef$$

se nazývá *Ptolemaiova věta*.

1.3 Soutěžní příklady

Příklad 1.1. V rovině je dán čtverec o straně délky a . Dokažte, že součet druhých mocnin vzdáleností všech jeho vrcholů od libovolné přímky této roviny, která prochází středem daného čtverce, je konstantní. Určete tuto konstantu. (2 body)

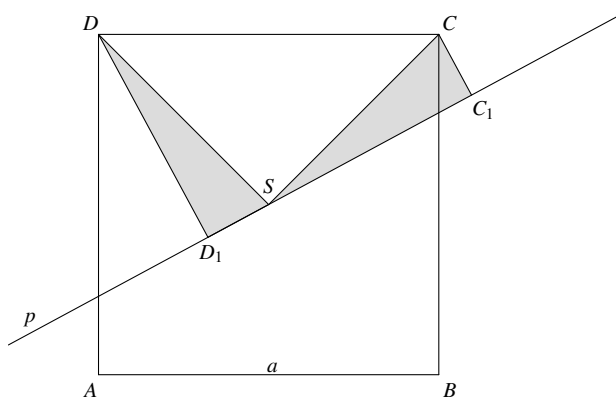
Řešení. Uvažme čtverec $ABCD$ se středem S , jehož strana má délku a , a přímku p . Rozlišme dva případy.

Prochází-li přímka p kromě středu S čtverce $ABCD$ ještě dvěma jeho protějšími vrcholy, např. A a C . V tomto případě je vzdálenost přímky p od vrcholů A a C nulová, od vrcholů B a D rovna polovině úhlopříčky, tj. $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$. Uvažovaný součet s druhých mocnin vzdáleností všech jeho vrcholů od přímky p roven

$$s = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} a \right)^2 = 2 \frac{1}{4} 2a^2 = a^2.$$

Druhý případ je, neprochází-li přímka p žádným vrcholem čtverce $ABCD$.

BÚNO (ze středové souměrnosti podle bodu S): Přímka p protíná strany BC a AD ve vnitřních bodech. Podobně stačí uvažovat tu dvojici vrcholů, které leží v téže polorovině s hraniční přímkou p , např. C a D ($|Ap| = |Cp|$, $|Bp| = |Dp|$). Situaci ilustruje následující obrázek.



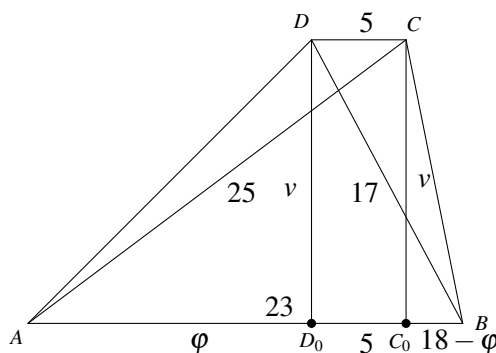
Označme C_1 a D_1 kolmé průměty vrcholů C a D na přímku p . Trojúhelníky SCC_1 a SDD_1 jsou oba pravouhlé, délky odvěsen $|SC| = |SD| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, a protože $|\angle CSC_1| + 90^\circ + |\angle DSD_1| = 180^\circ$ a $|\angle DSD_1| + 90^\circ + |\angle D_1DS| = 180^\circ$, tak $|\angle D_1DS| = |\angle CSC_1|$. Celkem jsou tedy trojúhelníky SCC_1 a SDD_1 jsou pravouhlé shodné. Z Pythagorovy věty pak pro součet s dostáváme

$$s = 2 (|CC_1|^2 + |DD_1|^2) = 2 (|CC_1|^2 + |SC_1|^2) = 2|SC|^2 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 = a^2.$$

■

Příklad 1.2. V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD . Určete délky ramen AD a BC tohoto lichoběžníku, znáte-li délky jeho základen, $|AB| = 23$ cm a $|CD| = 5$ cm, a úhlopříček, $|AC| = 25$ cm a $|BD| = 17$ cm. (2 body)

Řešení. Označme C_0, D_0 kolmý průmět bodů C, D na základnu AB , délku $|AD_0| = \varphi$. Body C_0, D_0 nám rozdělí AB na tři části jejichž délky jsou postupně φ , 5 a $18 - \varphi$. Označme dále v velikost výšky lichoběžníka.



Pak z Pythagorovy věty platí

$$\begin{aligned} v^2 + (\varphi + 5)^2 &= 25^2, \\ v^2 + (23 - \varphi)^2 &= 17^2. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$\begin{aligned} (\varphi + 5)^2 - (23 - \varphi)^2 &= 25^2 - 17^2, \\ 56\varphi &= 840, \\ \varphi &= 15. \end{aligned}$$

Dosazením φ do první rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} v^2 + 20^2 &= 25^2, \\ v^2 &= 15^2, \\ v &= 15. \end{aligned}$$

Další aplikací Pythagorovy věty dostáváme hledané délky stran $|BC|$ a $|AD|$

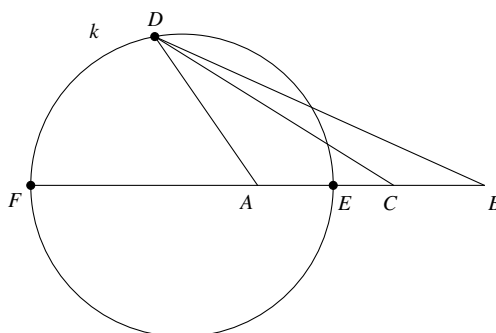
$$\begin{aligned} |BC|^2 &= v^2 + (18 - \varphi)^2, & |AD|^2 &= v^2 + \varphi^2, \\ |BC|^2 &= 234, & |AD|^2 &= 450, \\ |BC| &= 3\sqrt{26}, & |AD| &= 15\sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

Příklad 1.3. Je dána úsečka AB s vnitřním bodem C . Určete množinu všech bodů D takových, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku CBD je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ACD . (2 body)

Řešení. Uvažme libovolný trojúhelník s poloměrem r kružnice jemu opsané. Necht' a, b, c značí velikosti jeho stran, a α, β, γ velikosti odpovídajících vnitřních úhlů. Potom platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$



S ohledem na tento vztah pro poloměry r_1 a r_2 kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ACD a BCD platí

$$r_1 = \frac{|AD|}{2 \sin |\angle ACD|}, \quad r_2 = \frac{|BD|}{2 \sin |\angle BCD|}.$$

Protože $\sin |\angle ACD| = \sin |\angle BCD|$, hledáme body D s vlastností

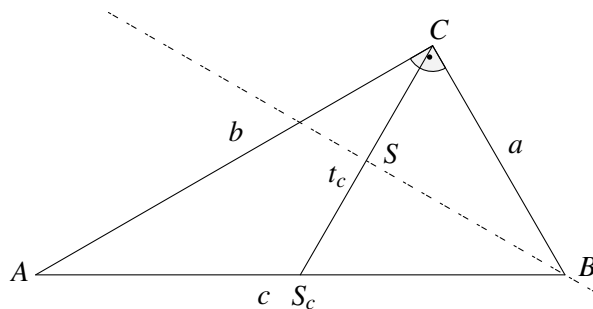
$$\frac{1}{2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|AD|}{2 \sin |\angle ACD|} \cdot \frac{2 \sin |\angle BCD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Vzhledem k tomu, že množinou všech bodů X roviny, pro než platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{1}{2}$, je Apolloniova kružnice, leží bod D nutně na této kružnici. Uvažovaná Apolloniova kružnice k je sestrojena nad průměrem EF , kde bod E je bodem úsečky AB , pro který platí $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{1}{2}$, a bod F je bodem polopřímky opačné k polopřímce AB , pro který platí $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{1}{2}$.

Naopak každý bod D , který leží na této (Apolloniově) kružnici k a současně neleží na přímce AB , má danou vlastnost. ■

Příklad 1.4. V rovině je dán pravouhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C . Určete, jaké jsou velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a C , prochází-li osa vnitřního úhlu při vrcholu B středem těžnice z vrcholu C . (3 body)

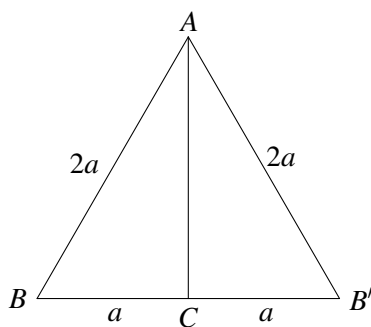
Řešení. Označme S_c střed strany c a S střed těžnice t_c .



Podle Bisector theorem platí

$$1 = \frac{|CS|}{|SS_c|} = \frac{|CB|}{|BS_c|} = \frac{a}{\frac{c}{2}}.$$

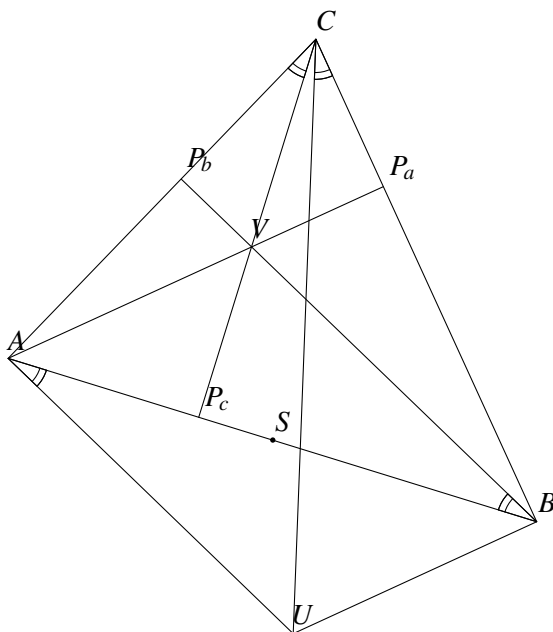
Odtud dostáváme, že $c = 2a$. Označme B' obraz bodu B v osové souměrnosti podle strany AC .



Vidíme, že trojúhelník ABB' je rovnostranný, a proto $|\angle ABC| = 60^\circ$ a $|\angle CAB| = 30^\circ$. ■

Příklad 1.5. Označme S střed strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek (ortocentrum). Obraz bodu V ve středové souměrnosti se středem S označme U . Dokažte, že úhly ACV a BCU jsou shodné. (3 body)

Řešení. Označme P_a, P_b a P_c paty výšek.



Čtyřúhelník $AVBU$ je rovnoběžník. Čtyřúhelník CP_aVP_b je tětiový, a protože platí $|\angle P_aVP_b| = |\angle AVB| = |\angle BUA|$, také čtyřúhelník $ACBU$ je tětiový. Díky tomu máme, že $|\angle UCB| = |\angle UAB|$. Vzhledem k tomu, že $AVBU$ je rovnoběžník a AB je jeho úhlopříčka, tak platí $|\angle UAB| = |\angle VBA|$. Trojúhelníky AP_bB a AP_cC jsou podobné, a proto platí $|\angle ACV| = |\angle ACP_c| = |\angle P_bBA| = |\angle VBA|$. Tím jsme ukázali, že $|\angle ACV| = |\angle UCB|$. ■

Příklad 1.6. Přímky AA_1 , BB_1 a CC_1 jsou osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , body A_1 , B_1 , C_1 leží na jeho odpovídajících stranách. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC po řadě při vrcholech A , B , C jsou v poměru $4 : 2 : 1$. Dokažte, že platí $|A_1B_1| = |A_1C_1|$. (3 body)

Řešení. Položme $\omega = \frac{180^\circ}{14}$. Pak platí

$$|\angle ACB| = 2\omega, \quad |\angle ABC| = 4\omega, \quad |\angle BAC| = 8\omega.$$

Označme I průsečík os úhlů. Bodem I ved' me rovnoběžku s přímkou BC a její průsečík se stranou AC označme K .

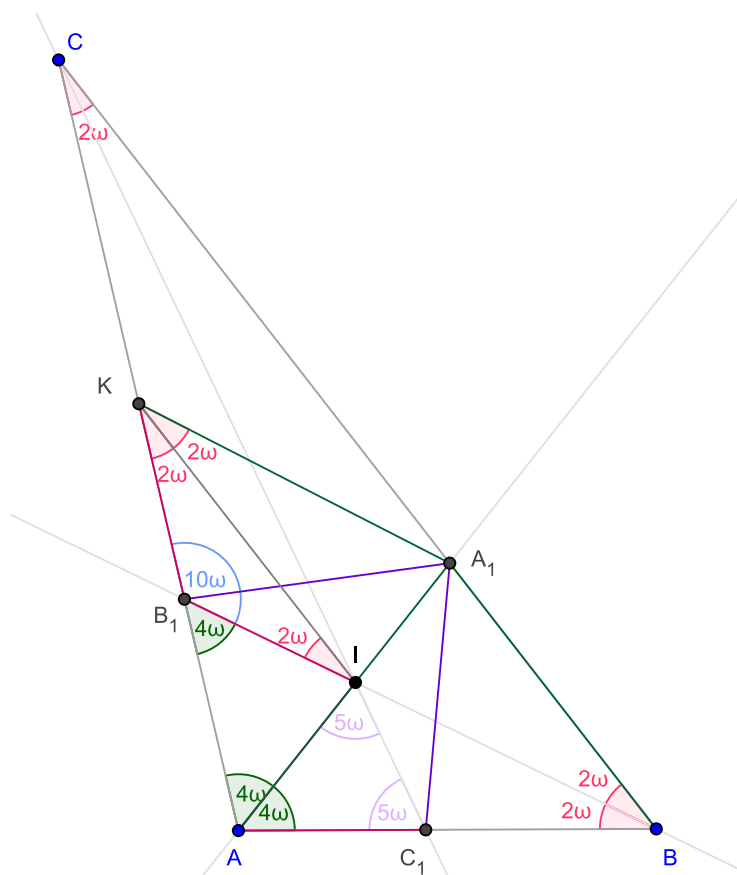
Budeme chtít ukázat, že trojúhelníky A_1AC_1 a A_1KB_1 jsou shodné.

Snadno odvodíme následující rovnosti (mj. s využitím rovnoběžnosti KI a BC)

$$|\angle AKI| = |\angle ACB| = |\angle ABI| = 2\omega, \quad |\angle KAI| = |\angle BAI| = 4\omega.$$

Odtud jsou trojúhelníky AIK a AIB podobné. Vzhledem k tomu, že mají shodnou stranu AI , jsou shodné. Proto

$$|AK| = |AB|.$$



Podle věty *sus* jsou trojúhelníky BA_1A a KA_1A shodné. Trojúhelník AA_1B je rovnoramenný, a proto

$$|A_1K| = |A_1B| = |AA_1|, \\ |\angle A_1KA| = |\angle A_1BA| = |\angle A_1AC_1| = 4\omega.$$

Dopočtem do $180^\circ = 14\omega$ v příslušných trojúhelnících dostaneme, že $|\angle AC_1C| = 5\omega$ a následně $|\angle AIC_1| = 5\omega$. Podobně $|\angle AB_1B| = 4\omega$. Dopočtem do přímého úhlu dostaneme, že $|\angle IB_1K| = 10\omega$ a proto $|\angle KIB_1| = 2\omega$. Trojúhelníky AIB_1 a IAC_1 a IB_1K jsou rovnoramenné a platí

$$|AC_1| = |AI| = |B_1I| = |B_1K|.$$

Dostali jsme, že platí

$$|A_1A| = |A_1K|, \quad |\angle A_1AC_1| = |\angle A_1KB_1|, \quad |AC_1| = |B_1K|.$$

Trojúhelníky A_1AC_1 a A_1KB_1 jsou shodné podle věty *sus*, proto $|A_1C_1| = |A_1B_1|$, což jsme měli dokázat. ■

Kapitola 2

Dělitelnost

2.1 Návodné příklady

Návodný příklad 2.1. Najděte základy z všech číselných soustav, ve kterých $(41)_z$ dělí $(1001)_z$.

Hint. Uvědomte si, jak převést číslo zapsané v soustavě o základu z do standardní desítkové soustavy. Podobně jako v desítkové soustavě můžeme rozepsat

$$1568 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0,$$

lze tuto úvahu snadno zobecnit pro libovolný základ $z \in \mathbb{N}$

$$(1568)_z = z^3 + 5z^2 + 6z + 8.$$

Dále můžete využít Euklidův algoritmus.

Řešení. Protože se v čísle $(41)_z$ nachází cifra 4, dostáváme, že $z \geq 5$. Nyní přepíšeme čísla v soustavě o základu z do desítkové soustavy. Budeme chtít určit, pro která z platí

$$4z + 1 \mid z^3 + 1.$$

Využijeme krok Euklidova algoritmu pro výpočet největšího společného dělitele

$$z^3 + 1 = (4z + 1) \cdot \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z}{4^2} + \frac{1}{4^3} \right) + \frac{63}{4^3}.$$

Protože jsou čísla 4 a $4z + 1$ nesoudělná, platí

$$4z + 1 \mid z^3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4z + 1 \mid 4^3(z^3 + 1).$$

Můžeme se proto zbavit zlomků

$$4^3(z^3 + 1) = (4z + 1) \cdot (4^2z^2 - 4z + 1) + 63.$$

Jistě $4z + 1$ dělí levou stranu právě tehdy, když dělí pravou stranu této rovnosti. Celkem $4z + 1 \mid z^3 + 1$, právě když $4z + 1 \mid 63$. Odtud $4z + 1 \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Spolu s odhadem $z \geq 5$ tj. $4z + 1 \geq 21$ dostáváme jediné řešení $z = 5$ (vždyť $4z + 1 = 63$ nemá celočíselné řešení). ■

Návodný příklad 2.2. Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základu $z \geq 5$ platí následující kritérium dělitelnosti: trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n , právě když je číslem n dělitelné číslo $c + 3b - 4a$.

Hint. Podobně jako v předchozím využijte přepisu původního čísla do desítkové soustavy. Protože se jedná o kritérium dělitelnosti, musí platit pro všechna $(abc)_z$. Vhodnou volbou cifer a, b, c lze získat některá čísla, která n musí dělit.

Řešení. Přepíšeme podmínku do desítkové soustavy

$$n \mid a \cdot z^2 + b \cdot z + c \quad \Leftrightarrow \quad n \mid c + 3b - 4a.$$

Zvolme $a = b = c = 1$, pak

$$n \mid z^2 + z + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \mid 0.$$

Protože pravá strana ekvivalence platí vždy, dostáváme, že $n \mid z^2 + z + 1$. Dále zvolme $a = 1, b = 0, c = 4$, pak

$$n \mid z^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad n \mid 0.$$

Opět odtud plyne, že $n \mid z^2 + 4$. Provedeme dva kroky Euklidova algoritmu

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= (z^2 + 4) \cdot 1 + (z - 3), \\ z^2 + 4 &= (z - 3) \cdot (z + 3) + 13. \end{aligned}$$

Dostáváme, že $n \mid 13$. Protože 13 je prvočíslo a $n > 1$, je nutně $n = 13$. Dostali jsme podmínku nutnou. Dokážeme, že je i postačující, tj. nalezneme vhodné z , aby zadané kritérium platilo. V prvním kroku Euklidova algoritmu jsme dostali, že $n \mid z - 3$. Zvolme tedy $z = 16$ a ověřme, že

$$13 \mid a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c \quad \Leftrightarrow \quad 13 \mid c + 3b - 4a.$$

To snadno rozmyslíme, vždyť

$$a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c = 13 \cdot (20a + b) + (c + 3b - 4a).$$

Úloha má tedy jediné řešení $n = 13$. ■

Návodný příklad 2.3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo.

Hint. Uvažme $m, n \in \mathbb{Z}$ taková, že $(m, n) = 1$, kde (m, n) značí největšího společného dělitele čísel m, n . Pak platí

$$(m, m+n) = 1 \quad \text{a} \quad (m^2, m+n) = 1.$$

Řešení. Buď d největší společný dělitel čísel x a y . Pak platí $x = da$, $y = db$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$. Buď dále p prvočíslo, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{xy^2}{x+y} &= p, \\ d^3 ab^2 &= dp(a+b), \\ d^2 ab^2 &= p(a+b). \end{aligned}$$

Jistě b^2 dělí levou stranu rovnice, musí dělit i pravou. Protože $(b^2, a+b) = 1$, musí platit $b^2 \mid p$, proto $b = 1$. Dostáváme

$$d^2 a = p(a+1).$$

Protože a dělí levou stranu rovnice, musí dělit i pravou a $(a, a+1) = 1$, musí proto platit $a \mid p$. Odtud $a = 1$, nebo $a = p$. Tyto dvě možnosti vyšetříme zvlášť

- Jestliže $a = 1$, dostáváme

$$d^2 = 2p.$$

Pak nutně $d = p = 2$ a dostáváme řešení $x = 2$, $y = 2$.

- Jestliže $a = p$, dostáváme

$$\begin{aligned} d^2 p &= p(p+1), \\ d^2 &= p+1, \\ p &= (d+1)(d-1). \end{aligned}$$

Odtud nutně plyne, že $d+1 = p$ a $d-1 = 1$. Tedy $d = 2$ a $p = 3$. To nám dává řešení $x = 6$, $y = 2$.

Celkem tedy dostáváme dvě řešení (x, y) , a to $(2, 2)$ a $(6, 2)$. ■

Návodný příklad 2.4. Hledané čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Zapišeme-li jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší číslo, které je také dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo.

Hint. Uvědomte si, že čísla m, n dávají stejný zbytek po dělení číslem k právě tehdy, když k dělí jejich rozdíl.

Řešení. Zapišme hledané číslo n ve tvaru $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Položme $k = \overline{dcba}$. Nejprve uvažme poslední podmínku o dělitelnosti 37, kterou aplikujeme na rozdíl $n - k$

$$\begin{aligned} 37 \mid 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a &= 999(a - d) + 90(b - c) = \\ &= 27 \cdot 37(a - d) + 90(b - c). \end{aligned}$$

Protože $(37, 90) = 1$, platí $37 \mid b - c$ a protože $0 \leq b, c \leq 9$, nastává rovnost $b = c$. Hledané číslo je tedy tvaru $\overline{abbd}$. Nyní aplikujeme podmínku o dělení sedmi na rozdíl $n - k$

$$7 \mid 999(a - d) + 90(b - b) = 999(a - d).$$

Protože $(7, 999) = 1$, platí $7 \mid a - d$. Protože $k > n$, je také $d > a$, navíc n je tvaru $\overline{1bb8}$, nebo $\overline{2bb9}$. Abychom určili b , použijeme předpoklad o dělitelnosti sedmi na číslo n v obou případech

$$\begin{aligned} 7 \mid 1000 + 100b + 10b + 8 &\Rightarrow 7 \mid b, \\ 7 \mid 2000 + 100b + 10b + 9 &\Rightarrow 7 \mid b. \end{aligned}$$

Dostáváme právě čtyři řešení: 1008, 1778, 2009, 2779. ■

Návodný příklad 2.5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$3^{n+3} \mid 1997^{3^n} + 1.$$

Hint. Zápis a^{b^c} lze zapsat s využitím závorek jako $a^{(b^c)}$. Dále lze například využít vztahů

$$\begin{aligned} a^{b+1} &= a \cdot a^b, \\ a^{b \cdot c} &= (a^b)^c = (a^c)^b, \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Řešení. Rozepíšeme číslo $1997^{3^n} + 1$ podle vzorce $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned} 1997^{3^n} + 1 &= (1997^{3^{n-1}} + 1) \left((1997^{3^{n-1}})^2 - 1997^{3^{n-1}} + 1 \right) = \\ &= (1997^{3^{n-2}} + 1) \left((1997^{3^{n-2}})^2 - 1997^{3^{n-2}} + 1 \right) \left((1997^{3^{n-1}})^2 - 1997^{3^{n-1}} + 1 \right) = \\ &= (1997^{3^0} + 1) \prod_{i=0}^{n-1} \left((1997^{3^i})^2 - 1997^{3^i} + 1 \right) = 1998 \prod_{i=0}^{n-1} \left((1997^{3^i})^2 - 1997^{3^i} + 1 \right). \end{aligned}$$

Protože $3^3 \mid 1998$, stačí ukázat, že pro každé $i = 0, \dots, n-1$ platí $3 \mid ((1997^{3^i})^2 - 1997^{3^i} + 1)$. Protože $1997 = 1998 - 1$, plyne z binomické věty, že

$$3 \mid ((1997^{3^i})^2 - 1997^{3^i} + 1) \Leftrightarrow 3 \mid ((-1)^{3^i})^2 - (-1)^{3^i} + 1 = 3.$$

Pravá strana ekvivalence zřejmě platí, proto $3^{n+3} \mid 1997^{3^n} + 1$ pro každé přirozené n . ■

Návodný příklad 2.6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$n \mid (3^n - 2) \Rightarrow 3^n - 1 \mid (3^{3^n - 1} - 3).$$

Hint. Využijte následující definice dělitelnosti pro celá čísla a, b :

Řekneme, že číslo a dělí číslo b , píšeme $a \mid b$, jestliže existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \cdot k = b$.

Řešení. Z podmínky $n \mid (3^n - 2)$ dostáváme, že $3^n - 2 = kn$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}$. Upravme nyní pravou stranu implikace

$$3^n - 1 \mid (3^{3^n - 1} - 3) = 3(3^{3^n - 2} - 1) = 3(3^{kn} - 1) = 3((3^n)^k - 1)$$

poslední výraz stačí rozepsat podle vzorce $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, tj.

$$((3^n)^k - 1) = (3^n - 1)((3^n)^{k-1} + (3^n)^{k-2} + \dots + 3^n + 1).$$

Tímto je důkaz hotov. ■

Návodný příklad 2.7. Aritmetický průměr několika navzájem různých prvočísel se rovná 27. Určete, jaké největší prvočíslo mezi nimi může být.

Hint. Nalezněte horní hranici, pro hledané prvočíslo (tj. omezte ho shora). Je možné, aby v uvažovaném aritmetickém průměru mohla být všechna „malá“ prvočísla?

Řešení. Označme P množinu prvočísel, jejichž aritmetický průměr je 27 a která obsahuje hledané prvočíslo p^* . Má-li být průměrem celé liché číslo, musí být součet sudého počtu čísel sudý a lichého počtu čísel lichý. Touto úvahou snadno zjistíme, že $2 \notin P$. Udělejme nyní horní odhad pro p^*

$$\frac{3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + p^*}{9} \leq 27.$$

Vyjádřením p^* z této nerovnice dostáváme

$$p^* \leq 145.$$

Nyní stačí brát sestupně prvočísla od 145 a provádět příslušnou kontrolu. Největší prvočíslo menší než 145 je 139.

$$\frac{3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 139}{9} = \frac{237}{9} = 26 + \frac{3}{9}.$$

Můžeme zkusit nějaké použité prvočíslo odebrat nebo naopak nějaké nové přidat. Lze uvážit následující postupy

- Můžeme si všimnout, že jsme od požadované hodnoty vzáleni o $\frac{6}{9}$. Stačí tedy místo 23 vzít $23+6 = 29$, což je také prvočíslo, a dostáváme

$$\frac{3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 29 + 139}{9} = 27.$$

- Bez odebrání prvočísel menších než 27 lze také dospět k výsledku

$$\frac{3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 139}{11} = 27.$$

Hledaným prvočíslem je $p^* = 139$. ■

2.2 Soutěžní příklady

Příklad 2.1. Uvažte dvě přirozená čísla $(15)_z$ a $(26)_z$ zapsaná v číselné soustavě o základu z , kde $z \geq 7$ je přirozené číslo. Určete všechny hodnoty z , pro něž jsou čísla $(15)_z$ a $(26)_z$ nesoudělná. (2 body)

Řešení. Přepíšeme zadaná čísla do desítkové soustavy a využijeme jeden krok Euklidova algoritmu

$$2z + 6 = 2 \cdot (z + 5) - 4.$$

Největší společný dělitel čísel $2z + 6$ a $z + 5$ musí dělit také číslo 4. Pokud společným dělitelem $2z + 6$ a $z + 5$ nebude dvojka, bude to už nutně jednička. Určitě $2 \mid 2z + 6$, nicméně $2 \mid z + 5$ pouze pro z lichá. Hledané hodnoty z jsou tedy všechna sudá čísla větší než 7. ■

Příklad 2.2. Dokažte, že dané přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů

$$\begin{aligned}(A+1)^2 - A, \\ (A+2)^2 - A, \\ (A+3)^2 - A, \\ \vdots \\ (A+n)^2 - A\end{aligned}$$

dělitelný číslem n .

(4 body)

Řešení. Dokázat ekvivalenci znamená dokazovat dvě implikace.

- „ $\Rightarrow$ “: Předpokládáme, že $A = a^2$, kde $a \in \mathbb{N}$. Bud' n libovolné, pak

$$\begin{aligned}(A+1)^2 - A &= (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2+a+1)(a^2-a+1), \\ (A+2)^2 - A &= (a^2+2)^2 - a^2 = (a^2+a+2)(a^2-a+2), \\ &\vdots \\ (A+n)^2 - A &= (a^2+n)^2 - a^2 = (a^2+a+n)(a^2-a+n).\end{aligned}$$

Jistě n dělí alespoň jedno z těchto čísel (první závorky v rozkladu na součin tvoří posloupnost n po sobě jdoucích přirozených čísel).

- „ $\Leftarrow$ “: Důkaz povedeme sporem, tj. předpokládáme, že libovolné $n \in \mathbb{N}$ dělí alespoň jeden ze zadaných rozdílů a A není druhou mocninou přirozeného čísla. Pak nutně existuje prvočíslo p , které se nachází v rozkladu čísla A na prvočísla v liché mocnině, tj. $p^{2k-1} \mid A$, ale $p^{2k} \nmid A$. Protože n je libovolné přirozené, zvolme $n = p^{2k}$. Předpokládáme dále, že p^{2k} dělí některý z rozdílů, tj. $p^{2k} \mid (A+j)^2 - A$ pro nějaké j . Jistě

$$p^{2k} \mid (A+j)^2 - A \quad \Rightarrow \quad p^{2k-1} \mid (A+j)^2 - A.$$

Volbou n máme, že $p^{2k-1} \mid A$, proto

$$p^{2k-1} \mid (A+j)^2 \quad \Rightarrow \quad p^{2k} \mid (A+j)^2,$$

vždyť $(A+j)^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla. Celkem

$$p^{2k} \mid (A+j)^2 - A \quad \Rightarrow \quad p^{2k} \mid A,$$

což je spor.

Tím je důkaz hotov. ■

Příklad 2.3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součet má poslední cifru 3, rozdíl je prvočíslo a součin je druhou mocninou přirozeného čísla. (4 body)

Řešení. Označme hledaná přirozená čísla x, y .

- Položme $d = (x, y)$, tj. $x = ad$, $y = bd$. Můžeme psát $x - y = d(a - b) = p$. Je-li $d > 1$, pak $p = d$ a $a - b = 1$, tj. $x = d(k + 1)$, $y = dk$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak ale $xy = d^2k(k + 1)$. To není druhá mocnina přirozeného čísla, což je spor. Proto $d = 1$ a můžeme psát $x = u^2$, $y = v^2$.
- Víme, že poslední cifra součtu $x + y = u^2 + v^2$ má být 3. Uvažme čísla tvaru $n = 10k + j$, kde $j = 0, 1, \dots, 9$ a podívejme se na poslední cifry n^2 . Dostáváme

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zbytek	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Víme, že $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = p$, proto $u + v = p$, $u - v = 1$, tedy $u = v + 1$. Proto se můžeme zabývat pouze dvěma po sobě jdoucími druhými mocninami. Dostáváme dva typy řešení

$$u_1 = 10k + 3, \quad v_1 = 10k + 2 \quad \text{a} \quad u_2 = 10l + 8, \quad v_2 = 10l + 7$$

pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}_0$.

- Uvažme $u_1^2 - v_1^2 = (u_1 + v_1)(u_1 - v_1) = 20k + 5 = p$, odtud nutně $k = 0$. Snadno ověříme, že $x = 3^2$, $y = 2^2$ je řešení.
- V druhém případě $u_2^2 - v_2^2 = (u_2 + v_2)(u_2 - v_2) = 20l + 15 = p$ nedostáváme žádné řešení.

Řešením je jediná dvojice čísel, a to 9 a 4. ■

Příklad 2.4. 1. Dokažte:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+2} \mid 2013^{2^n} - 1 \quad \text{a zároveň} \quad 2^{n+3} \nmid 2013^{2^n} - 1.$$

2. Nalezněte všechna $k \in \mathbb{Z}$ splňující:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+2} \mid k^{2^n} - 1 \quad \text{a zároveň} \quad 2^{n+3} \nmid k^{2^n} - 1.$$

(3 body)

Řešení. Rozepíšeme číslo $2013^{2^n} - 1$ pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\begin{aligned} 2013^{2^n} - 1 &= \\ &= (2013^{2^{n-1}} + 1)(2013^{2^{n-1}} - 1) = (2013^{2^{n-1}} + 1)(2013^{2^{n-2}} + 1)(2013^{2^{n-2}} - 1) = \dots \\ &\dots = (2013^{2^{n-1}} + 1)(2013^{2^{n-2}} + 1) \dots (2013^{2^0} + 1)(2013^{2^0} - 1) = \\ &= 2012 \prod_{i=0}^{n-1} (2013^{2^i} + 1). \end{aligned}$$

Protože $4 \mid 2012$, ale $8 \nmid 2012$, stačí nám pro důkaz první části ukázat, že $2 \mid 2013^{2^i} + 1$, ale $4 \nmid 2013^{2^i} + 1$. Sudost je splněna triviálně. Protože $2013 = 2012 + 1$, plyne nedělitelnost čtyřkou z binomické věty. Stejnými úpravami jako výše můžeme dostat totožný tvar i pro obecné k

$$k^{2^n} - 1 = (k - 1) \prod_{i=0}^{n-1} (k^{2^i} + 1).$$

Jednoduchou úvahou dospějeme k řešení, že $k = 8l \pm 3$ pro libovolné $l \in \mathbb{Z}$. ■

Příklad 2.5. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s obvodem 180, jejichž délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly. (2 body)

Řešení. Označme jednotlivé délky stran jako a, b a c , kde $a^2 + b^2 = c^2$. Navíc $a + b + c = 180$, můžeme tedy dosadit za c a upravovat

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (180 - a - b)^2, \\ a^2 + b^2 &= a^2 + b^2 + 180^2 - 2 \cdot 180a - 2 \cdot 180b + 2ab, \\ ab - 180a - 180b + 180^2 &= 90 \cdot 180, \\ (180 - a)(180 - b) &= 90 \cdot 180. \end{aligned}$$

Protože a, b jsou délky odvěsen, platí $180 - a > 90$, $180 - b > 90$. Rozkládáme proto číslo $90 \cdot 180 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ na součin dvou přirozených čísel větších než 90.

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 120 \cdot 135 = 108 \cdot 150 = 100 \cdot 162$$

Dostáváme tři řešení $(30, 72, 78)$, $(45, 60, 75)$ a $(18, 80, 82)$. ■

Příklad 2.6. Dokažte, že číslo $5^n + 7^n + 13^n$ je složené pro každé přirozené číslo n . (2 body)

Řešení. Vypišme si nejprve několik prvních členů

n	1	2	3	4	5	6	7
$5^n + 7^n + 13^n$	25	143	2665	31587	391225	4960083	63650185

Snadno rozmyslíme, že pro n lichá jsou příslušná čísla vždy dělitelná pěti. O něco méně triviální je všimnout si, že pro n sudá jsou všechna čísla dělitelná třemi. Nyní dokážeme, že toto skutečně platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, využijeme u toho binomické věty.

- Je-li n liché, pak

$$5 \mid 5^n + 7^n + 13^n = 5^n + (5+2)^n + (15-2)^n \Leftrightarrow 5 \mid 2^n + (-2)^n = 0.$$

Tedy skutečně pro všechna n lichá naše hypotéza platí.

- Je-li n sudé, pak

$$3 \mid 5^n + 7^n + 13^n = (6-1)^n + (6+1)^n + (12+1)^n \Leftrightarrow 3 \mid (-1)^n + 1^n + 1^n = 3.$$

Dokázali jsme tvrzení i pro n sudá.

Protože každý člen posloupnosti je jistě větší než 5 a je dělitelný buď 3 nebo 5, musí být nutně složeným číslem. Tím je tvrzení dokázáno. ■

Kapitola 3

Rovnice a jejich soustavy, nerovnosti

3.1 Teorie

Definice 3.1. Necht' n je přirozené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Pak definujeme

- jejich *aritmetický průměr* A předpisem

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n};$$

- jejich *geometrický průměr* G předpisem

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n};$$

- jejich *harmonický průměr* H předpisem

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}};$$

- jejich *kvadratický průměr* Q předpisem

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Poznámka 3.2. U aritmetického, geometrického a kvadratického průměru se dá definice rozšířit na nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Věta 3.3 (Nerovnosti mezi průměry). Pro aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr libovolných kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosti

$$Q \geq A \geq G \geq H.$$

Rovnost v každé z nerovností nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Věta 3.4 (Cauchyho-Schwarzova nerovnost). Necht' n je přirozené číslo a a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou libovolná reálná čísla. Pak platí nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ nebo existuje reálné číslo λ takové, že $a_i = \lambda b_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Poznámka 3.5. Předchozí nerovnost pro $n = 3$ a a, b, c nenulová neidentická čísla nám tedy říká, že

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x : y : z = a : b : c$.

Poznámka 3.6. Cauchyho-Schwarzova nerovnost se často formuluje pro vektory následovně:

Necht' V je euklidovský prostor (vektorový prostor se skalárním součinem), $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ libovolné. Pak platí:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|,$$

tzn. absolutní hodnota skalárního součinu dvou vektorů je menší nebo rovna součinu velikostí těchto vektorů.

3.2 Návodné příklady

Návodný příklad 3.1. V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + xy + xz - yz &= -2, \\y^2 + xy + yz - xz &= 3, \\z^2 + xz + yz - xy &= 6.\end{aligned}$$

Řešení. Sečteme postupně první rovnici s druhou, druhou s třetí a třetí s první. Dostáváme

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy + y^2 &= 1, \\y^2 + 2yz + z^2 &= 9, \\z^2 + 2xz + x^2 &= 4.\end{aligned}$$

Protože x, y, z jsou nezáporná čísla, je odmocnění ekvivalentní úprava.

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\y + z &= 3, \\x + z &= 2.\end{aligned}$$

Odtud snadno dostáváme jediné řešení soustavy $(0, 1, 2)$. ■

Návodný příklad 3.2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 - |x| &= |yz|, \\y^2 - |y| &= |zx|, \\z^2 - |z| &= |xy|.\end{aligned}$$

Řešení. Protože pro libovolná reálná čísla platí $x^2 = |x|^2$ a $|xy| = |x| \cdot |y|$, můžeme soustavu upravit do tvaru

$$\begin{aligned}|x| \cdot (|x| - 1) &= |y| \cdot |z|, \\|y| \cdot (|y| - 1) &= |z| \cdot |x|, \\|z| \cdot (|z| - 1) &= |x| \cdot |y|.\end{aligned}$$

Snadno vidíme, že $(0, 0, 0)$, $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ a $(0, 0, \pm 1)$ jsou řešení, a jiné kombinace s 0 nebo ± 1 řešením nejsou. Ukažme, že jsou to všechna řešení.

Pokud jsou neznámé různé od 0 nebo ± 1 , jsou všechny strany rovnic nenulové a můžeme tak tyto rovnice ekvivalentně pronásobit. Dostaneme rovnici

$$|x| \cdot (|x| - 1) \cdot |y| \cdot (|y| - 1) \cdot |z| \cdot (|z| - 1) = |x|^2 \cdot |y|^2 \cdot |z|^2,$$

kterou můžeme pokrátit nenulovým $|x| \cdot |y| \cdot |z|$ na tvar

$$(|x| - 1) \cdot (|y| - 1) \cdot (|z| - 1) = |x| \cdot |y| \cdot |z|.$$

Protože pro libovolná reálná čísla platí nerovnost $|x| - 1 < |x|$, platí i nerovnost

$$(|x| - 1) \cdot (|y| - 1) \cdot (|z| - 1) < |x| \cdot |y| \cdot |z|,$$

a rovnice další řešení nemá. ■

Návodný příklad 3.3. Řešte následující rovnice (ne jako soustavu) v oboru reálných čísel:

$$26x^2 + 29y^2 + 5z^2 - 4xy - 10yz - 20xz = 0,$$

$$(4x + 7y + z)^2 = 66(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$(4x + y + 3)^2 = 26(x^2 + y^2 + 1).$$

Hint. S výhodou můžete použít Cauchy-Schwarzovu nerovnost.

Řešení. První rovnici upravíme do tvaru

$$(2x + 1y + 5z)^2 = 30(x^2 + y^2 + z^2)$$

a použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost. Rovnost nastává právě když

$$x = 2\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 5\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

U druhé rovnice je vidět řešení ihned po použití Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti:

$$x = 4\lambda, \quad y = 7\lambda, \quad z = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Podobně u třetí rovnice dostaneme $x = 4\lambda$, $y = \lambda$ a $1 = 3\lambda$. Vidíme, že $\lambda = \frac{1}{3}$, tedy

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

■

Návodný příklad 3.4. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující podmínky

- existuje $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $f(a) \neq 0$,
- $f(x - y + z) = f(x) - f(y) + f(z)$,
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + f(x - y) + f(y - x)$.

Hint. Zkuste si dosadit nějaké, vhodně zvolené, hodnoty.

Řešení. Zkusíme dosazovat konkrétní hodnoty za x a y do zadaných vztahů

- $x = y = 0$

$$f(0 \cdot 0) = f(0)f(0),$$

$$f(0)(f(0) - 1) = 0.$$

Je-li $f(0) = 0$, pak pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(x \cdot 0) = -f(x) + f(x) + f(-x) = f(-x),$$

což je spor s první podmínkou. Proto

$$f(0) = 1.$$

- $y = 0$ a x je libovolné

$$f(x \cdot 0) = f(x) - f(x) - 1 + f(x) + f(-x),$$

$$f(x) + f(-x) = 2.$$

- Uvažme $x = y = -1$, pak s využitím předchozího zjištění dostáváme

$$f(1) = f(-1)f(-1) - 2f(-1) + 2$$

$$f(-1)(f(-1) - 1) = 0.$$

- Je-li $f(-1) = 1$, pak také $f(1) = 1$. Dosadíme do součtového vzorce

$$f(x + 1) = f(x - 0 + 1) = f(x) - 1 + 1 = f(x),$$

$$f(x - 1) = f(x - 1 + 0) = f(x) + 1 - 1 = f(x).$$

Dostáváme tedy jedno možné řešení

$$f(x) = 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

- Je-li $f(-1) = 0$, pak $f(1) = 2$. Dosadíme do součtového vzorce

$$f(x + 1) = f(x - 0 + 1) = f(x) - 1 + 2 = f(x) + 1,$$

$$f(x - 1) = f(x - 1 + 0) = f(x) - 2 + 1 = f(x) - 1.$$

Zřejmá indukce nám dá druhé řešení (využíváme vztahu $f(0) = 1$)

$$f(x) = x + 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

Zadání splňují právě dvě funkce

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x + 1.$$



Návodný příklad 3.5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Hint. Je možno využít AG nerovnost.

Řešení. Trojím užitím AG nerovnosti obdržíme

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^3}{bc}, b, c\right) : \quad \frac{a^3}{bc} + b + c &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3a, \\ \left(\frac{b^3}{ca}, c, a\right) : \quad \frac{b^3}{ca} + c + a &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca} \cdot c \cdot a} = 3b, \\ \left(\frac{c^3}{ab}, a, b\right) : \quad \frac{c^3}{ab} + a + b &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot a \cdot b} = 3c. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a + b + c) \geq 3(a + b + c).$$

Odečtením čísla $2(a + b + c)$ dostáváme dokazovanou nerovnost. Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c$. ■

Návodný příklad 3.6. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Hint. Je možno využít AH nerovnost.

Řešení. Využijme AH nerovnosti pro kladná reálná čísla $\frac{1}{b(a+b)}, \frac{1}{c(b+c)}, \frac{1}{a(c+a)}$, která nám říká

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left[\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \right] &\geq \frac{3}{b(a+b) + c(b+c) + a(c+a)}, \\ \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} &\geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}, \end{aligned}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $b(a+b) = c(b+c) = a(c+a)$.

Dále víme, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

S využitím této nerovnosti dostáváme

$$\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Celkem tedy máme nerovnost

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $b(a+b) = c(b+c) = a(c+a)$ a současně $a = b = c$, tedy právě tehdy, když $a = b = c$. ■

3.3 Soutěžní příklady

Příklad 3.1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z = 2,$$

$$y^2 + z^2 + x = 2,$$

$$z^2 + x^2 + y = 2.$$

(2 body)

Řešení. Odečteme druhou rovnici od první, třetí od druhé a první od třetí. Dostáváme

$$x^2 - z^2 - (x - z) = (x - z)(x + z - 1) = 0,$$

$$y^2 - x^2 - (y - x) = (y - x)(y + x - 1) = 0,$$

$$z^2 - y^2 - (z - y) = (z - y)(z + y - 1) = 0.$$

Stačí rozebrat, které závorky se v součinném tvaru nulují.

- Necht' $x = y = z$, pak nám každá z původních zadaných rovnic přejde do tvaru

$$2x^2 + x - 2 = 0.$$

Kvadratickou rovnici vyřešíme a dostáváme dvě řešení $x = y = z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

- Necht' $x = y$ a $x + z = y + z = 1$, pak můžeme dosadit do původních rovnic za y a z . Dostáváme

$$2x^2 + (1 - x) = 2,$$

$$x^2 + (1 - x)^2 + x = 2,$$

$$x^2 + (1 - x)^2 + x = 2.$$

Při bližším pohledu zjistíme, že se jedná o stejnou rovnici

$$2x^2 - x - 1 = 0,$$

kterou snadno vyřešíme a dostáváme dvě řešení: $x = 1$ a $x = -\frac{1}{2}$, snadno dopočítáme zbylé proměnné. Stejným způsobem vyřešíme případy, kdy $x = z \neq y$ a $y = z \neq x$.

- Poslední případ je, kdy $x \neq y \neq z \neq x$ a $x + z = y + x = y + z = 1$, což ale nemůže nastat.

Jako řešení dostáváme trojice

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right), \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \right),$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).$$

■

Příklad 3.2. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a^3 + b^2}{ab} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Rozhodněte navíc, kdy nastává rovnost.

(2 body)

Řešení. Nejprve uděláme odhad

$$\frac{a^3 + b^2}{ab} \geq \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

který jistě pro všechna přirozená čísla a, b platí. Nyní dokážeme, že

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Jednoduchou úpravou převedeme nerovnost do tvaru

$$\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right)^2 \cdot \frac{a+b}{2} \geq (\sqrt{ab})^3,$$
$$Q^2(a, b) \cdot A(a, b) \geq G^3(a, b),$$

kde Q, A, G značí kvadratický, aritmetický a geometrický průměr. Protože $Q \geq A \geq G$, je tímto nerovnost dokázána.

Nyní budeme chtít ukázat, kdy nastane rovnost, tj.

$$\frac{a^3 + b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{4\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Víme, že pravá rovnost nastane právě tehdy, když $a = b$. Levá rovnost nastane, právě když $a = 1$. Celkem tedy rovnost nastává, právě když $a = b = 1$. ■

Příklad 3.3. Řešte v oboru kladných reálných čísel soustavu

$$xz + y^2 = 2yz,$$

$$yt + z^2 = 2tz,$$

$$zx + t^2 = 2tx,$$

$$ty + x^2 = 2xy.$$

(2 body)

Řešení. Protože jsou $x, y, z, t > 0$, můžeme první rovnici podělit yz a třetí tx . Dostáváme

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = 2,$$

$$\frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 2.$$

Tyto dvě rovnice sečteme a dostáváme

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 4.$$

Použitím AG nerovnosti dostáváme

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{t}{x}} = 1.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{t} = \frac{t}{x} = 1$, tj. $x = y = z = t$. Dosazením do zadání snadno ověříme platnost i druhých dvou rovnic. ■

Příklad 3.4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu

$$\frac{x^2y - x^2}{\sqrt{4yz + x^2 - 4y^2 - z^2}} + xy^2 + 2xy - xz + y^2 - x - y = 0,$$

$$\frac{3x^2}{\sqrt{4yz + x^2 - 4y^2 - z^2}} - x + 2y = 0,$$

$$\frac{x^2y - x^2}{\sqrt{4yz + x^2 - 4y^2 - z^2}} - 2xy^2 + 2xz + 3y^2 - 11xy - 3y + 9x = 0.$$

(4 body)

Řešení.

- Nejprve dokážeme, že $x \neq 0$. Postupujme sporem, tj. předpokládáme, že $x = 0$, pak přejde soustava do tvaru

$$y^2 - y = 0,$$

$$2y = 0,$$

$$3y^2 - 3y = 0.$$

Odtud nutně $y = 0$ a odmocnina ve jmenovateli je tvaru $\sqrt{-z^2}$, což je spor.

- Sporem dokážeme, že $y \neq 1$. Kdyby totiž $y = 1$, pak je soustava ve tvaru

$$\begin{aligned}x(2-z) &= 0, \\ \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 - (z-2)^2}} - x + 2 &= 0, \\ 2x(z-2) &= 0.\end{aligned}$$

Již z předchozího víme, že $x \neq 0$, proto $z = 2$. Druhá rovnice pak přejde do tvaru

$$3|x| - x + 2 = 0,$$

kde ale levá strana rovnice je vždy kladná. Tedy $y \neq 1$.

- Vydělíme první a třetí rovnici $x \cdot (y-1)$ a druhou x . Dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2 - (z-2y)^2}} + \frac{y}{x} + \frac{y^2 + 2y - z - 1}{y-1} &= 0, \\ \frac{3x}{\sqrt{x^2 - (z-2y)^2}} + 2\frac{y}{x} &= 1, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - (z-2y)^2}} + 3\frac{y}{x} + \frac{-2y^2 + 2z - 11y + 9}{y-1} &= 0\end{aligned}$$

- Provedeme substituci

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 - (z-2y)^2}}, \quad b = \frac{y}{x}, \quad c = \frac{y^2 + 2y - z - 1}{y-1}.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}a + b + c &= 0, \\ 3a + 2b &= 1, \\ a + 3b - 2c &= 7.\end{aligned}$$

Vyřešíme tuto soustavu a máme jediné řešení: $a = -1, b = 2, c = -1$.

- Z rovnosti

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - (z-2y)^2}} = -1$$

dostáváme, že $x < 0$ a $z = 2y$. Dále z $\frac{y}{x} = 2$ máme $y = 2x$. Dosadíme za c

$$c = \frac{y^2 + 2y - z - 1}{y-1} = \frac{4x^2 + 4x - 4x - 1}{2x-1} = 2x + 1 = -1.$$

Celkem máme jediné řešení

$$(-1, -2, -4).$$

■

Příklad 3.5. Rozhodněte o řešení následující soustavy v závislosti na parametru p

$$\begin{aligned}13x^2 - 4xy + 10y^2 - 12yz + 5z^2 - 6xz &= 0, \\61y^2 - 48yz + 41z^2 - 60zt + 52t^2 - 40yt &= 0, \\(p^2 + 9)x^2 - 4pxt + 13t^2 - 12pt - 24x &= -4p^2 - 16.\end{aligned}$$

(3 body)

Řešení. Upravíme všechny tři rovnice do tvaru, ve kterém budeme moci aplikovat Cauchyho-Schwarzovu nerovnost, tj.

$$\begin{aligned}(x + 2y + 3z)^2 &= 14(x^2 + y^2 + z^2), \\(4y + 6z + 5t)^2 &= 77(y^2 + z^2 + t^2), \\(2x + pt + 3 \cdot 2)^2 &= (p^2 + 13)(x^2 + t^2 + 2^2).\end{aligned}$$

Nyní stačí určit, kdy v Cauchyho-Schwarzově nerovnosti nastává rovnost. Z prvních dvou rovnic hned dostaneme, že pokud by měla být některá z neznámých rovna nule, pak by musely být rovné nule všechny, což vylučuje poslední rovnici. Rovnice nám tedy postupně dají

$$\begin{aligned}x : y : z &= 1 : 2 : 3, \\y : z : t &= 4 : 6 : 5, \\x : t : 2 &= 2 : p : 3.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme, že $x : z : t = 2 : 6 : 5$, odkud plyne $p = 5$. Z poslední rovnice dostáváme $x : 2 = 2 : 3$, tj. $x = \frac{4}{3}$, ze získaných poměrů snadno dopočítáme další neznámé.

Soustava má řešení pouze pro $p = 5$ a to

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{8}{3}, \quad z = 4, \quad t = \frac{10}{3}.$$

■

Příklad 3.6. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující podmínky

- existuje $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $f(a) \neq 0$,
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + f(1)$,
- $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) - f(1)$.

(2 body)

Řešení. Zkusíme dosazovat konkrétní hodnoty za x a y do zadaných vztahů

- Položme $x = 0, y = 1$, pak

$$\begin{aligned}f(0 \cdot 1) &= f(0)f(1) - f(0) - f(1) + f(1), \\f(0)(f(1) - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Rozmysleme případ, kdy $f(0) = 0$. Uvažme proto $x = 0$ a y je libovolné, pak

$$\begin{aligned}f(0 \cdot y) &= f(0)f(y) - f(0) - f(y) + f(1), \\f(1) &= f(y),\end{aligned}$$

To nám dá $f(y) = 0$ pro libovolné y , což je spor s první podmínkou, proto

$$f(1) = 2.$$

- Položme $x = 1, y = 0$, pak

$$\begin{aligned} f(1+0) + f(1-0) &= 2f(1) + 2f(0) - f(1), \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Dále uvažme $x = y = 1$

$$\begin{aligned} f(1+1) + f(1-1) &= 2f(1) + 2f(1) - f(1), \\ f(2) &= 5. \end{aligned}$$

- Nyní uvažme x libovolné a $y = 1$

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(x-1) &= 2f(x) + 2f(1) - f(1), \\ f(x+1) &= 2f(x) - f(x-1) + 2, \\ f(x-1) &= 2f(x) - f(x+1) + 2. \end{aligned}$$

Toto vyjádření nám (spolu s počátečními podmínkami $f(1) = 2$ a $f(0) = 1$) dává jednoznačnost řešení, tj. když vhodnou funkci uhodneme, již víme, že bude jediným hledaným řešením.

- Vyčíslíme funkci v několika bodech pomocí předchozích vzorců

$$\begin{array}{ll} f(1) = 2, & f(-1) = 2, \\ f(2) = 5, & f(-2) = 5, \\ f(3) = 10, & f(-3) = 10, \\ f(4) = 17, & f(-4) = 17, \\ f(5) = 26, & f(-5) = 26. \end{array}$$

Vidíme, že zatím vždy platí $f(x) = x^2 + 1$, zkusme tento vztah dokázat.

1. Vyčíslíme $f(-x)$ jako $f(-1 \cdot x)$, když víme, že $f(1) = f(-1)$:

$$f(-x) = f(-1)f(x) - f(-1) - f(x) + f(1) = f(x).$$

Funkce je tedy sudá. Dokažme rekurentní vztah indukci. Víme, že $f(1) = 2$. Předpokládejme, že $f(n) = n^2 + 1$, pak

$$f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + 2 = 2n^2 + 2 - n^2 + 2n - 2 + 2 = (n+1)^2 + 1.$$

2. Druhá možnost je ukázat, že funkce $f(x) = x^2 + 1$ splní tři zadané podmínky. Z jednoznačnosti pak bude toto naše hledaná funkce. První podmínka je splněna triviálně a platí

$$\begin{aligned} (xy)^2 + 1 &= (x^2 + 1)(y^2 + 1) - (x^2 - 1) - (y^2 - 1) + 2, \\ (x+y)^2 + 1 + (x-y)^2 + 1 &= 2x^2 + 2y^2 + 2. \end{aligned}$$

Existuje jediná funkce splňující zadání a to

$$f(x) = x^2 + 1.$$

■

Kapitola 4

Geometrie II

4.1 Teorie

4.1.1 Feuerbachova kružnice

Eulerova přímka

Věta 4.1. *Necht' je dán trojúhelník ABC . Označme S střed kružnice opsané, T těžiště a V průsečík výšek. Předpokládejme, že $V \neq S$. Pak body S , T a V leží na společné přímce. Tato přímka se nazývá Eulerova přímka.*

Kružnice devíti bodů

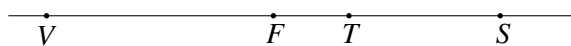
Věta 4.2. *Necht' je dán trojúhelník ABC . Označme V průsečík výšek. Platí: Body souměrně sdružené k průsečíku výšek V podle stran trojúhelníku i podle středů stran trojúhelníku leží na kružnici opsané.*

Mějme dán trojúhelník ABC . Uvažujme stejnolehlost se středem v bodě V (průsečík výšek) a koeficientem stejnolehlosti $k = \frac{1}{2}$. Předchozí tvrzení nám dává odpověď na otázku, jak vypadá obraz kružnice opsané trojúhelníku ABC v této stejnolehlosti. To je zformulováno v následující větě.

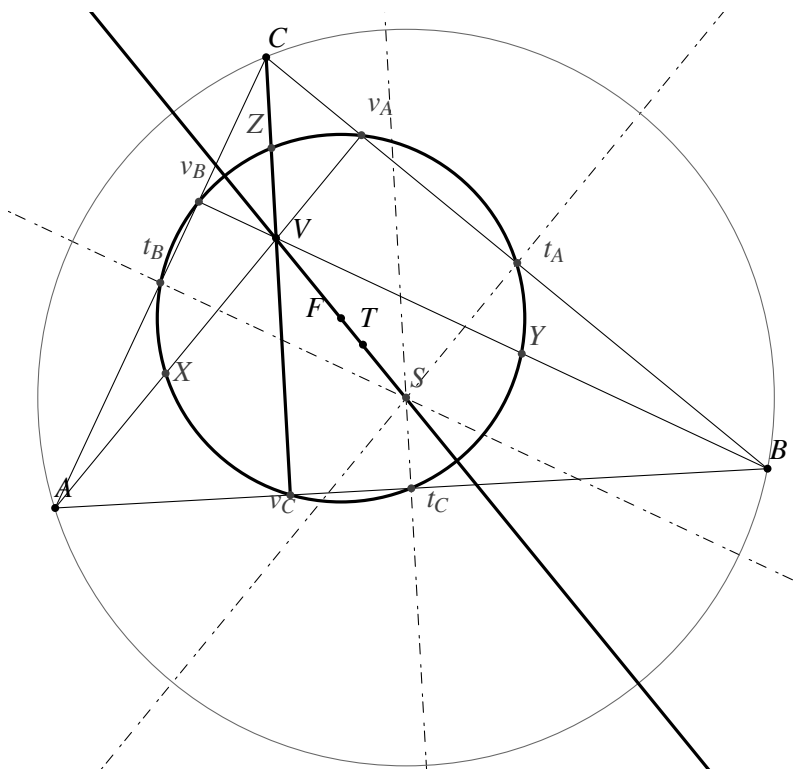
Věta 4.3. *Necht' je dán trojúhelník ABC . Označme v_A, v_B, v_C paty výšek, dále t_A, t_B, t_C středy stran trojúhelníku ABC a X, Y, Z středy úseček AV, BV, CV . Těchto devět bodů leží na společné kružnici. Této kružnici se říká Feuerbachova kružnice nebo také kružnice devíti bodů.*

Věta 4.4. *Střed F Feuerbachovy kružnice leží na Eulerově přímce a platí*

$$|TF| = \frac{1}{2}|TS|, \quad |VF| = \frac{1}{2}, \quad |VF| = |FS|.$$



Poznámka 4.5. Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, přičemž pokud mají různé poloměry, tak existují právě dvě stejnolehlosti, jedna s kladným, druhá se záporným koeficientem. Střed stejnolehlosti s kladným koeficientem nazveme *vnějším středem stejnolehlosti*, střed se záporným koeficientem pak *vnitřním středem stejnolehlosti*.



Věta 4.6. Necht' je dán trojúhelník ABC . Označme T těžiště a V průsečík výšek. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC a Feuerbachova kružnice jsou stejnohlé, přičemž vnějším středem stejnohllosti je bod V a vnitřním středem stejnohllosti je bod T .

Mocnost bodu ke kružnici

Definice 4.7. Necht' k je kružnice se středem S a poloměrem r a A je libovolný bod v rovině. Číslo $|AS|^2 - r^2$ se nazývá *mocnost bodu A ke kružnici k* a značí se $M(A, k)$.

Jednoduché pozorování: Platí

$$\begin{aligned} M(A, k) &> 0 \Leftrightarrow A \text{ je bodem vnější oblasti kružnice } k, \\ M(A, k) &= 0 \Leftrightarrow A \text{ je bodem kružnice } k, \\ M(A, k) &< 0 \Leftrightarrow A \text{ je bodem vnitřní oblasti kružnice } k. \end{aligned}$$

Věta 4.8. Necht' k je kružnice se středem S a poloměrem r a A je libovolný bod v rovině, který neleží na kružnici k . Bodem A ved'me sečnu (resp. tečnu) kružnice k a její průsečíky s kružnicí k označme C a D (resp. T). Potom platí

$$|AC| \cdot |AD| = M(A, k), \text{ resp. } |AT|^2 = M(A, k).$$

Poznámka 4.9. Všimněme si, že součin $|AC| \cdot |AD|$ nezávisí na volbě sečny vedené bodem A .

Věta 4.10. Necht' k je kružnice se středem S a poloměrem r . Bud' $m > -r^2$ libovolné číslo. Pak množina všech bodů X takových, že $M(X, k) = m$ je kružnice se středem v bodě S a poloměrem $\sqrt{m + r^2}$.

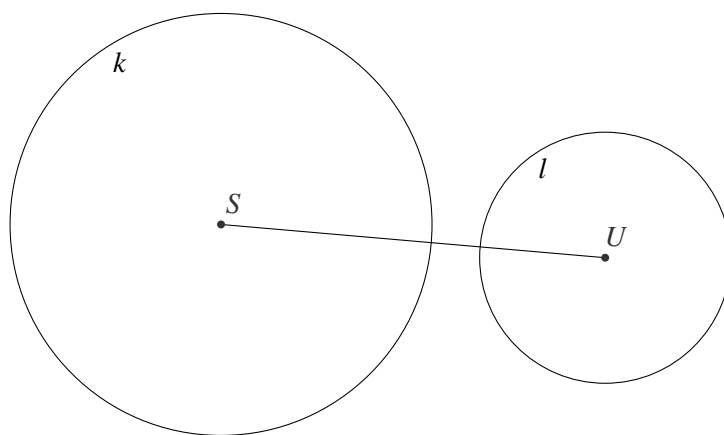
Předpokládejme, že nyní máme dány dvě kružnice. Můžeme se ptát, jak vypadá množina bodů, které mají stejnou mocnost k oběma kružnicím.

Věta 4.11. *Necht' jsou dány dvě kružnice k se středem S a poloměrem r a l se středem $U \neq S$ a poloměrem ρ . Množina všech bodů X takových, že $M(X, k) = M(X, l)$, je přímka kolmá na přímku SU . Tato přímka se nazývá chordála kružnic k, l .*

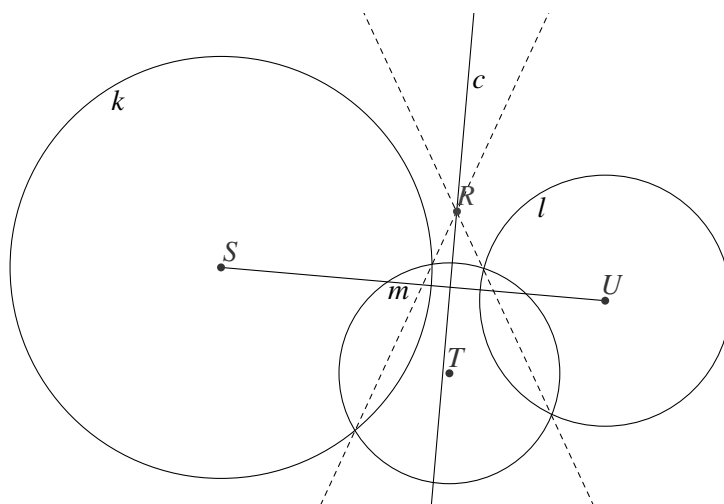
Poznámka 4.12. Pokud $U = S$ a $r \neq \rho$, je množina všech bodů X takových, že $M(X, k) = M(X, l)$, prázdná.

Věta 4.13. *Necht' jsou dány dvě kružnice k se středem S a poloměrem r a l se středem $U \neq S$ a poloměrem ρ . Předpokládejme, že kružnice k a l mají společný bod R . Pak chordála kružnic k, l prochází bodem R .*

Zabývejme se nyní situací, kdy kružnice nemají žádný společný bod.



V tomto případě můžeme zkonstruovat pomocnou kružnici m , která protíná obě kružnice. Průsečík R chordály kružnic k, m a chordály kružnic l, m leží na chordále kružnic k, l . Chordála kružnic k, l je tedy přímka, která je kolmá na SU a prochází bodem R . Bod R se nazývá *chordální střed* nebo *potenční bod* kružnic k, l, m .



4.2 Návodné příklady

Návodný příklad 4.1. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC jdou body S , střed kružnice opsané, T , těžiště, a V , průsečík výšek (ortocentrum), kolineární.

Řešení. Stejnolehlost se středem v těžišti T trojúhelníku ABC zobrazí V na bod V' , který je průsečíkem výšek příčkového trojúhelníku. Osy stran trojúhelníku ABC jsou právě výšky příčkového trojúhelníku, a proto $S = V'$. ■

Návodný příklad 4.2. Necht' je dán libovolný trojúhelník ABC a předpokládejme, že $V \neq S$, kde V je průsečík výšek a S je střed kružnice opsané. Dále označme D střed strany AB a T těžiště trojúhelníka ABC . Dokažte, že $S_{TVC} = 4S_{DTS}$.

Řešení. Z předchozího příkladu plyne nejen, že body S , V a T leží na společné přímce, ale také dostáváme, že $|TV| = 2|ST|$. Neboť $|CT| = 2|DT|$, máme, že $S_{TVC} = 4S_{DTS}$. ■

Návodný příklad 4.3. Na kružnici k jsou dány body A, B, C, D tak, že AB je průměr kružnice k a tětiva CD je kolmá k AB . Na úsečce CD je dán bod L . Necht' M je průsečík přímky AL s kružnicí k , $M \neq A$. Dokažte, že součin $|AL| \cdot |AM|$ je nezávislý na poloze bodu L .

Řešení. Označme K průsečík úseček AB a CD . Čtýřúhelník $KBML$ je tětíkový, a proto body K, B, M, L leží na společné kružnici, kterou označíme l . Pro mocnost bodu A ke kružnici l platí $|AL| \cdot |AM| = |AK| \cdot |AB|$. Protože $|AB|$, $|AK|$ jsou pevně zvolené, je výraz $|AL| \cdot |AM|$ konstantní, nezávislý na poloze bodu L . ■

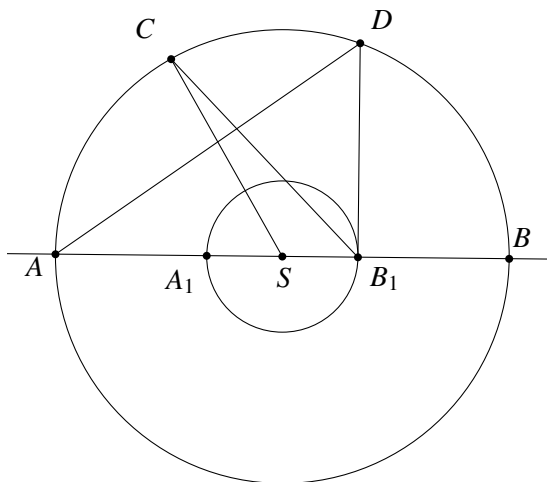
4.3 Soutěžní příklady

Příklad 4.1. Necht' jsou dány dvě soustředné kružnice se společným středem S o poloměrech r a R , $0 < r < R$. Bodem S ved' me libovolnou přímku. Tato přímka protne kružnice po řadě v bodech A, A_1, B_1, B . Na větší kružnici zvolme body C a D tak, že $|\angle CSB_1| = 4|\angle ABC|$, a $DB_1 \perp AB$. Určete v jakém poměru musí být r a R , aby platilo $|DB| = 2\sqrt{3}r$, a pro tento poměr spočítejte

$$\frac{S_{DAB_1}}{S_{CB_1S}}.$$

(2 body)

Řešení. Nejprve ukážeme, že trojúhelník ACS je rovnostranný. Zřejmě je rovnoramenný, neboť $|AS| = |CS| = R$. Z vlastností středového a obvodového úhlu plyne, že $|\angle ASC| = 2|\angle ABC|$, což spolu s předpokladem $|\angle CSB_1| = 4|\angle ABC|$ dává $|\angle CSB_1| = 2|\angle ASC|$. Současně platí $|\angle CSB_1| + |\angle ASC| = 3|\angle ASC| = 180^\circ$, a tedy $|\angle ASC| = 60^\circ$.



Nyní vypočteme poměr r a R . Podle Eukleidovy o věty o výšce platí

$$|DB_1|^2 = |B_1B| \cdot |AB_1| = (R+r)(R-r).$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$|DB|^2 = |DB_1|^2 + |B_1B|^2,$$

což po dosazení dává

$$(R-r)(R+r) + (R-r)^2 = 12r^2$$

$$(R-r)(R+r+R-r) = 12r^2$$

$$R(R-r) = 6r^2$$

$$R^2 - Rr - 6r^2 = (R-3r)(R+2r) = 0.$$

Odtud dostáváme, že $R = 3r$.

Zbývá vypočítat příslušné obsahy. Označme v výšku trojúhelníka ASC . Platí $v = 3r\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dále platí

$$S_{CB_1S} = \frac{1}{2}|B_1S|v = \frac{1}{2}3r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2,$$

$$S_{DAB_1} = \frac{1}{2}|AB_1||DB_1| = \frac{1}{2}4r\sqrt{8r^2} = \frac{4\sqrt{8}}{2}r^2.$$

Výsledný poměr pak je

$$\frac{S_{DAB_1}}{S_{CB_1S}} = \frac{8\sqrt{8}}{3\sqrt{3}}.$$

■

Příklad 4.2. Necht' je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , $a < b < c$. Označme V průsečík výšek, k kružnici opsanou trojúhelníku ABC a S její střed. Dále označme P patu výšky na stranu AB a R střed strany AB . Necht' P' je obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu úsečky VS . Dokažte, že pro libovolnou tětivu XY kružnice k procházející bodem V platí

$$4|SR| = \frac{|VX||VY|}{|SP'|}.$$

(4 body)

Řešení. Označme F střed Feuerbachovy kružnice. Necht' $R' \neq P$ je průsečík výšky CP trojúhelníka ABC a Feuerbachovy kružnice. Nejprve ukážeme, že $|SP'||SR| = |VR'||VP|$. Protože úsečky SP' a VP jsou středově souměrné podle středu F , stačí ukázat, že body R a R' jsou středově souměrné podle středu F . Obrazem přímky VP ve středové souměrnosti podle středu F je přímka určená body S a P' . Obraz bodu R' musí ležet nejen na Feuerbachově kružnici, ale také na přímce SP' . Stačí tedy ukázat, že bod R leží na přímce SP' . Přímka SP' je rovnoběžná s přímkou VP a tato je kolmá na AB . Z toho plyne, že SP' je osa strany AB , a proto R leží na SP' .

Přímka VP protne kružnici k v bodech C, C' . Protože je kružnice k obrazem Feuerbachovy kružnice ve stejnolehlosti se středem v bodě V a koeficientem $k = 2$, tak platí

$$|VC||VC'| = 4|VP||VR'|.$$

Necht' XY je libovolná tětiva kružnice k procházející bodem V . Pak platí

$$|VX||VY| = M(V, k) = |VC||VC'| = 4|VP||VR'| = 4|SP'||SR|.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme požadovaný výsledek. ■

Příklad 4.3. Necht' je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Necht' K, L, M jsou po řadě středy stran AB, BC, AC trojúhelníka ABC . Dokažte že těžiště trojúhelníka KLB leží na chordále kružnic opsaných trojúhelníkům CML a AMK , právě když platí $|MK| = |ML|$. (3 body)

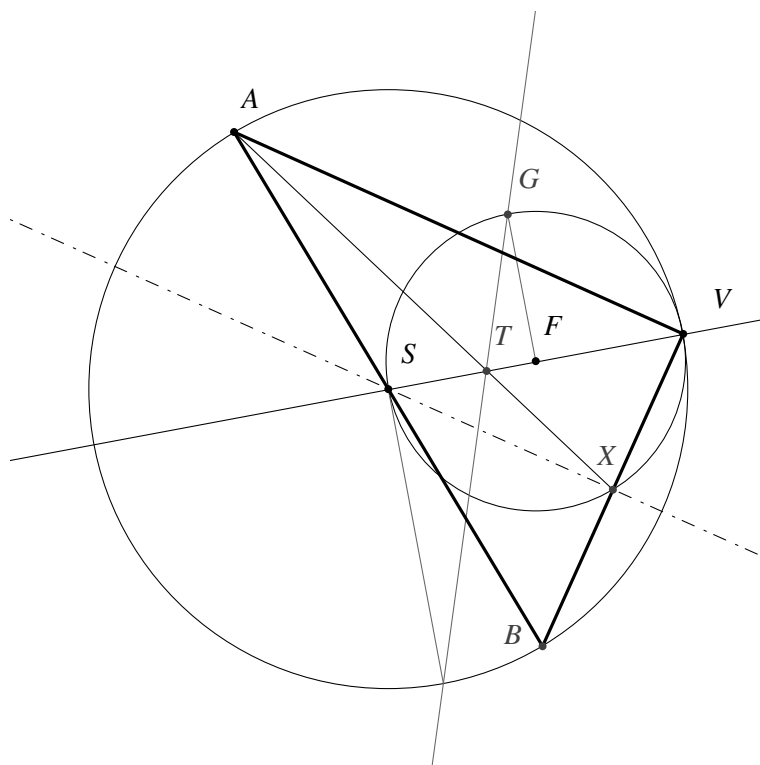
Řešení. Označme T' těžiště trojúhelníka KLB , k, l kružnice opsané trojúhelníkům CML a AMK , p chordálu kružnic k, l a S_1, S_2 středy kružnic k, l . Pak platí:

$$\begin{aligned} T' \in p &\Leftrightarrow MB = MT' = p \Leftrightarrow M(B, k) = M(B, l) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |BL| \cdot |BC| = |BA| \cdot |BK| \Leftrightarrow |BA| = |BC| \Leftrightarrow |MK| = |ML|. \end{aligned}$$

■

Příklad 4.4. Kružnice opsaná trojúhelníku se dotýká kružnice procházející středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelník je pak pravoúhlý, přičemž bod dotyku obou kružnic je jeho vrcholem, v němž je vnitřní úhel pravý. (3 body)

Řešení. Vnitřní střed stejnolehlosti, která převádí Feuerbachovu kružnici na kružnici opsanou danému trojúhelníku, je T těžiště trojúhelníka, vnější střed - bod dotyku kružnic - je V průsečík výšek trojúhelníka. Označme X bod Feuerbachovy kružnice, který leží na přímce AT a pro který platí, že T je vnitřní bod úsečky AX . Pak je X středem strany a , která je protilehlá vrcholu A . Dále musí platit, že $SX \perp a$. Současně platí, že $VX \perp SX$. Z toho vyplývá, že V je vrchol trojúhelníka. Současně je to také průsečík výšek, a proto je úhel při tomto vrcholu pravý.



■

Kapitola 5

Kombinatorika, pravděpodobnost, invarianty

5.1 Teorie

Věta 5.1 (Pravidlo součtu). *Necht' M je neprázdná množina, $M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou neprázdné podmnožiny množiny M a platí:*

1. $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$
2. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$

Pak platí: $|M| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_n|$.

Poznámka 5.2 (Kombinatorický význam pravidla součtu). Pravidlo součtu nám umožňuje celý problém rozdělit na několik diskrétních případů, v nich jej vyšetřit, a poté získané počty opět sečíst.

Věta 5.3 (Pravidlo součinu). *Necht' $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_n| = m_n, m_i \in \mathbb{N}$ pro $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ Pak platí: $|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$.*

Poznámka 5.4 (Kombinatorický význam pravidla součinu). Máme-li vybrat n objektů závislých na pořadí, přičemž první můžeme vybrat m_1 způsoby, $\dots$, n -tý objekt m_n způsoby, pak tento celek můžeme vybrat $m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ způsoby.

Věta 5.5 (Dirichletův princip). *Máme-li alespoň $nk + 1$ předmětů ($n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$) rozdělit do k přihrádek, pak v alespoň jedné přihrádce bude alespoň $n + 1$ předmětů.*

Definice 5.6. Necht' $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$.

Pak definujeme $n! := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ pro $n \in \mathbb{N}$ a dále $0! := 1$.

Dále definujeme kombinační číslo „ n nad k “ předpisem $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Poznámka 5.7. Číslo $n!$ vyjadřuje počet všech pořadí z n rozlišitelných prvků.

Číslo $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet všech k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny, tedy počet všech možností výběru k z n rozlišitelných prvků.

Věta 5.8 (Binomická věta). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.*

Pak platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Věta 5.9 (Princip inkluze a exkluze). *Necht' $M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou konečné množiny. Pak platí:*

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| &= |M_1| + |M_2| + \dots + |M_n| - \\ &\quad - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \dots - |M_{n-1} \cap M_n| + \\ &\quad + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{n-2} \cap M_{n-1} \cap M_n| - \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \cdot |M_1 \cap \dots \cap M_n| = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (-1)^{r+1} \cdot |M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_r}|. \end{aligned}$$

Věta 5.10 (Speciální případ principu inkluze a exkluze). *Necht' $M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou konečné množiny. Jestliže je každý z $\binom{n}{r}$ sčítanců $|M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_r}|$ stejný, tedy počet prvků průniku závisí jen na počtu množin r , a ne na konkrétních množinách, pak platí*

$$|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} |M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_r}|.$$

Definice 5.11. Necht' Ω je konečná neprázdná množina stejně možných výsledků, tj. množina všech elementárních jevů.

Necht' $A \subseteq \Omega$.

Pak klasickou pravděpodobností jevu A rozumíme reálné číslo $P(A)$ definované předpisem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Klasickou pravděpodobnost můžeme interpretovat jako: $\frac{\text{počet všech příznivých jevů}}{\text{počet všech možných jevů}}$.

5.2 Návodné příklady

Návodný příklad 5.1. Před symbol „ $=$ “ doplňte libovolné vhodné funkční symboly (matematické operace) a závorky tak, aby platilo

$$1\ 1\ 1 = 6$$

$$4\ 4\ 4 = 6$$

$$7\ 7\ 7 = 6$$

$$2\ 2\ 2 = 6$$

$$5\ 5\ 5 = 6$$

$$8\ 8\ 8 = 6$$

$$3\ 3\ 3 = 6$$

$$6\ 6\ 6 = 6$$

$$9\ 9\ 9 = 6$$

přičemž nesmíte doplnit žádné číslo.

(Například pro $7\ 7\ 7 = 2$ doplníme $+$ a $:$ spolu se závorkami takto: $(7 + 7) : 7 = 2$.)

Řešení. Řešení existuje velké množství, můžeme doplnit operace a závorky například následujícím způsobem

$$(1 + 1 + 1)! = 6$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$$

$$7 - 7 : 7 = 6$$

$$2 + 2 + 2 = 6$$

$$5 + 5 : 5 = 6$$

$$\lfloor \sqrt{8} \rfloor + \lfloor \sqrt{8} \rfloor + \lfloor \sqrt{8} \rfloor = 6$$

$$3 \cdot 3 - 3 = 6$$

$$6 + 6 - 6 = 6$$

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9} = 6$$

Snadno rozmyslíme, že nám ve skutečnosti stačí závorky, dolní a horní celá část, logaritmus, sčítání a faktoriál pro libovolnou rovnici $x\ x\ x = 6$. ■

Návodný příklad 5.2. V každém z k měšců je n bílých a m černých kuliček. Z prvního měšce náhodně vytáhneme jednu kuličku a vložíme ji do druhého. Pak z druhého měšce náhodně vytáhneme opět jednu kuličku a vložíme ji do třetího atd. Určete, jaká je pravděpodobnost toho, že z posledního (k -tého) měšce vytáhneme bílou kuličku.

Řešení. Označme $p_i (i = 1, \dots, k)$ pravděpodobnost, že z i -tého měšce vytáhneme (po přemístění kuliček podle textu úlohu) bílou kuličku. Zřejmě platí

$$p_1 = \frac{m}{m+n}.$$

Do i -tého měšce přeneseme z předešlého buď bílou nebo černou kuličku. V případě, že přenesená kulička byla bílá, je pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z i -tého měšce

$$p_{i-1} \cdot \frac{n+1}{m+n+1},$$

v případě, že přenesená kulička byla bílá, pak

$$(1 - p_{i-1}) \cdot \frac{n}{m+n+1}.$$

Jelikož jde o návzájem nezávislé jevy, je pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z i -tého měšce rovna součtu těchto pravděpodobností, tj.

$$p_i = p_{i-1} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} + (1 - p_{i-1}) \cdot \frac{n}{m+n+1}.$$

Pro $i = 2$ je pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z druhého měšce rovna

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \cdot \frac{n+1}{m+n+1} + (1 - p_1) \cdot \frac{n}{m+n+1} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} + \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \cdot \frac{n}{m+n+1} = \\ &= \frac{m}{m+n} = p_1 \end{aligned}$$

Užitím principu matematické indukce dále dostáváme

$$p_k = p_{k-1} = \dots = p_2 = p_1 = \frac{m}{m+n}.$$

■

Návodný příklad 5.3. V každém vrcholu pravidelného 2014úhelníku leží právě jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout

- na 1007 hromádek po 2 mincích,
- na 2 hromádky po 1007 mincích.

Řešení. Viz Příklad 5.3.

■

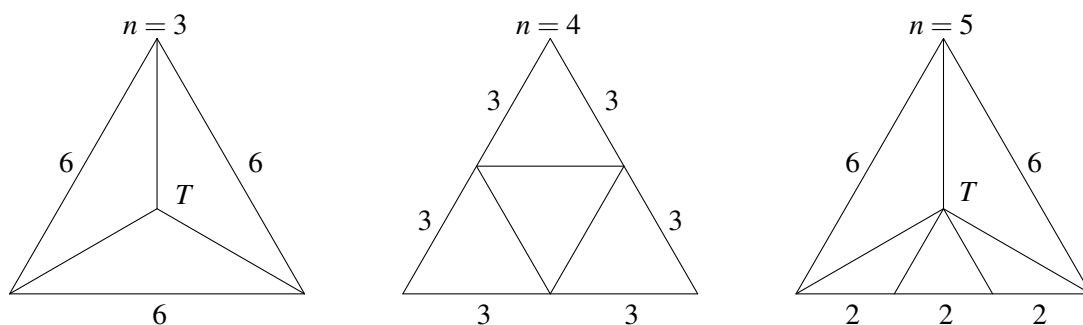
Návodný příklad 5.4. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Označme dále a_n počet všech slov délky n končících na A , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Dokažte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí: } p_n = a_n + a_{n+2}.$$

Řešení. Viz Příklad 5.4. ■

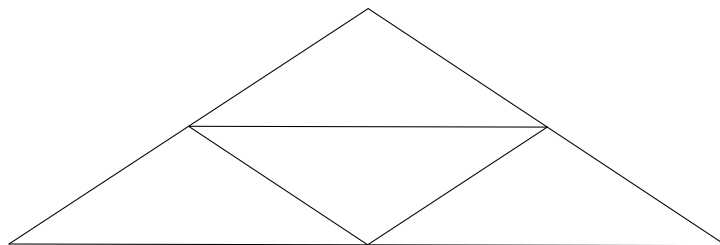
Návodný příklad 5.5. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$ lze rozřezat rovnostranný trojúhelník na n trojúhelníků, z nichž každý je rovnoramenný (či rovnostranný).

Řešení. Použijme upravený princip matematické indukce, s krokem tři. Je tedy dokázat na začátku platnost tvrzení hned pro tři hodnoty $n = 3, 4, 5$. Že to pro ně platí, je ukázáno na obrázku 5.1, přičemž T značí těžiště rovnostranného trojúhelníka, délka strany rovna šesti je jen kvůli poměrům.



Obrázek 5.1: Rozřezání pro $n = 3, 4, 5$.

Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \geq 3$ a ukažme, že platí i pro $n + 3$. Stačí si ale zvolit libovolný z rovnoramenných trojúhelníků v řezu, a ten rozřezat podobně jako v situaci pro $n = 4$, tedy pomocí středních příček, viz obrázek 5.2, na čtyři rovnoramenné trojúhelníky.



Obrázek 5.2: Indukční krok o tři.

Tímto je důkaz hotov pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$. ■

Návodný příklad 5.6. Knihař má svázat 12 různých knih do desek červené, hnědé a modré barvy. Kolika způsoby to může provést, má-li materiálu každé barvy použít na vazbu alespoň jedné knihy?

Řešení. Každý možný způsob svázání si můžeme představit jako 12-prvkovou variaci s opakováním ze tří prvků (barev).

Označme K_i množinu všech takových svázání, ve kterých není žádná kniha svázána do desek i -té barvy, $i = \{1, 2, 3\}$, tedy všechna nepovolená svázání tvoří množinu $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Dále označme K množinu všech povolených svázání. Jelikož všech možných svázání bez jakýchkoliv podmínek je 3^{12} , platí:

$$K = 3^{12} - |K_1 \cup K_2 \cup K_3|.$$

$|K_1 \cup K_2 \cup K_3|$ spočteme principem inkluze a exkluze. Pro $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 3$ množina $K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_r}$ obsahuje ta svázání, která neobsahují žádnou z r pevně vybraných barev desek. Pro každou knihu pak máme $3 - r$ možností na barvu desek, čili

$$|K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_r}| = (3 - r)^{12}.$$

Jak vidno, tento počet nezávisí na tom, jaké konkrétní barvy jsme zakázali, ale jen na jejich počtu. Ze speciálního případu principu inkluze a exkluze tedy dostáváme

$$|K_1 \cup K_2 \cup K_3| = \sum_{r=1}^3 (-1)^{r+1} \binom{3}{r} (3 - r)^{12}.$$

Celkem pak

$$K = 3^{12} - \sum_{r=1}^3 (-1)^{r+1} \binom{3}{r} (3 - r)^{12} = \sum_{r=0}^3 (-1)^r \binom{3}{r} (3 - r)^{12} = 519\,156.$$

■

5.3 Soutěžní příklady

Příklad 5.1. Uvažme rovnice

$$\begin{aligned} a_1 \circ_1 a_1 \bullet_1 a_1 &= n, \\ a_2 \circ_2 a_2 \bullet_2 a_2 &= n, \\ &\vdots \\ a_k \circ_k a_k \bullet_k a_k &= n, \end{aligned}$$

kde $n, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je $\circ_i, \bullet_i \in \{+, -, \cdot, :\}$ a pro $i \neq j$ je $a_i \neq a_j$.

- Určete největší $k \in \mathbb{N}$, pro které lze doplnit do každé z k rovnic za $\circ_i$ a $\bullet_i$ některou z operací $+, -, \cdot, :$ tak, aby všechny rovnice platily.
- Pro takové k určete nejmenší možné $n \in \mathbb{N}$.

Například snadno vidíme, že $k \geq 4$, vždyť

$$\begin{array}{ll} 1 \circ_1 1 \bullet_1 1 = 3, & 1 + 1 + 1 = 3, \\ 2 \circ_2 2 \bullet_2 2 = 3, & \text{lze totiž doplnit} \quad 2 + 2 : 2 = 3, \\ 3 \circ_3 3 \bullet_3 3 = 3, & 3 + 3 - 3 = 3, \\ 4 \circ_4 4 \bullet_4 4 = 3, & 4 - 4 : 4 = 3. \end{array}$$

Řešení. Máme celkem 16 možností, jak můžeme operace $+, -, \cdot, :$ dosadit. Rozmysleme, co každá možnost znamená pro n , pokud má platit rovnice $a \circ a \bullet a = n$.

$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n
+	+	$3a$	-	+	a	$\cdot$	+	$a \cdot (a+1)$	:	+	$a+1$
+	-	a	-	-	$-a$	$\cdot$	-	$a \cdot (a-1)$	:	-	$1-a$
+	$\cdot$	$a \cdot (a+1)$	-	$\cdot$	$-a(a-1)$	$\cdot$	$\cdot$	a^3	:	$\cdot$	a
+	:	$a+1$	-	:	$a-1$	$\cdot$	:	a	:	:	$a=1$

Ihned můžeme vyloučit kombinace $- -, - \cdot, : -,$ protože $a, n \in \mathbb{N}$. Následně můžeme omezit duplicitu (například z možností $+: a: +$ budeme uvažovat pouze jednu, protože pro dané n bychom dostali stejnou trojici a), tj. omezíme se na

$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n
+	+	$3a$	-	:	$a-1$
+	-	a	$\cdot$	-	$a \cdot (a-1)$
+	$\cdot$	$a \cdot (a+1)$	$\cdot$	$\cdot$	a^3
+	:	$a+1$			

Ukažme, že žádné $n \in \mathbb{N}$ nemůže být třetí mocninou a zároveň součinem dvou po sobě jdoucích čísel. Předpokládejme, že $n = a(a+1)$. Jestliže nějaké prvočíslo $p \mid a$, pak $p \nmid a+1$. Proto pokud $p^3 \mid n$, pak p^3 dělí právě jedno z čísel $a, a+1$. Proto $a = k^3, a+1 = l^3$. Navíc $1 = l^3 - k^3 = (l-k)(l^2 + lk + k^2)$, což nelze. Protože podmínka, že n se dá napsat jako součin dvou po sobě jdoucích čísel, vystupuje u dvou kombinací, vyloučíme i kombinaci znamének $\cdot \cdot$. Celkem tedy dostáváme, že $k \leq 6$, přičemž nyní hledáme n , pro které bude rovnic existovat právě šest.

Protože n je součin dvou po sobě jdoucích čísel a $3 \mid n$, tak právě jedno z těchto čísel bude dělitelné třemi. Můžeme uvažovat postupně $n = 2 \cdot 3$, $n = 3 \cdot 4$, $n = 5 \cdot 6$, ... Snadno ověříme, že pro $n = 6$ nám splynou rovnice pro $+$ a $+$, pro $n = 12$ nám splynou rovnice pro $+$ a $\cdot$, $-$. Pro $n = 30$ však dostáváme všech šest rovnic

$$10 + 10 + 10 = 30$$

$$29 + 29 : 29 = 30$$

$$30 + 30 - 30 = 30$$

$$31 - 31 : 31 = 30$$

$$5 + 5 \cdot 5 = 30$$

$$6 \cdot 6 - 6 = 30$$

Celkem tedy $k = 6$ a $n = 30$.

Pro úplnost poznamenejme, že tvar $a \cdot (a \pm 1) = n$ nám může dát nejvýše jedno přirozené řešení a . Jedná se vlastně o řešení kvadratické rovnice $a^2 \pm a - n = 0$ s neznámou a . Dostáváme tedy $a = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$, přičemž varianta $\frac{\pm 1 - \sqrt{1+4n}}{2}$ určitě přirozená nebude. ■

Příklad 5.2.

Na schodišti o n schodech hrajeme následující hru:

- Na začátku si stoupneme na první schod (tj. krokem dolů se dostaneme pod schodiště, $n - 1$ kroky nahoru schodiště vyjdeme).
- Na každém schodu se rozhodujeme: s pravděpodobností p uděláme krok nahoru, v opačném případě (s pravděpodobností $1 - p$) krok dolů.
- Hra končí, dostaneme-li se pod schodiště či jej vyjdeme.

Spočtete s jakou pravděpodobností schodiště vyjdeme, když

- (a) $n = 4$ a $p = \frac{3}{5}$ (chceme se posunout o 3 schody nahoru, přičemž krok nahoru uděláme s pravděpodobností 60%, jinak jdeme dolů),
- (b) n je libovolné a $p = \frac{1}{2}$.

Řešení. Výhrou budeme rozumět situaci, kdy jsme schodiště vyšli, prohrou situaci, kdy jsme z něj sestoupili dolů. Označme p_i pravděpodobnost toho, že vyhrájeme z i -tého schodu. Tuto pravděpodobnost můžeme vyjádřit jako

$$p_i = p \cdot p_{i+1} + (1 - p) \cdot p_{i-1},$$

pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$, kde $p_0 = 0$ a $p_n = 1$. Stačí si totiž uvědomit, že pravděpodobnost, že vyhrájeme z i -tého schodu je vlastně pravděpodobnost, že jsme udělali krok nahoru a vyhrájeme z tohoto schodu, plus pravděpodobnost, že jsme udělali krok dolů a odtud vyhrájeme. Přitom víme, že na n -tém schodu vyhráváme vždy (tj. s pravděpodobností 1) a na „nultém“ schodu vždy prohráváme (tj. vyhráváme s pravděpodobností 0).

(a) Dle předchozího vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{5}p_2 \\ p_2 &= \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5}p_1 \\ p_3 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}p_2 \end{aligned}$$

Dosadíme p_1 za p_2 do druhé rovnice a odtud vyjádříme p_2 v závislosti na p_3

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)p_2 \\ \frac{19}{25}p_2 &= \frac{3}{5}p_3 \\ p_2 &= \frac{15}{19}p_3 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme do poslední rovnice za p_2 a spočítáme p_3 .

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{15}{19}p_3\right) \\ \frac{13}{19}p_3 &= \frac{3}{5} \\ p_3 &= \frac{57}{65} \end{aligned}$$

A zpětně vyjádříme hledanou hodnotu p_1

$$p_1 = \frac{3}{5}p_2 = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{15}{19} \cdot p_3 \right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{15}{19} \cdot \frac{57}{65} \right) = \frac{27}{65}.$$

(b) Opět vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}p_2 \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_1 \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_2 \\ &\vdots \\ p_{n-2} &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-3} \\ p_{n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{n-2} \end{aligned}$$

a postupně dosazujeme

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{4}p_2 \\ p_2 &= \frac{2}{3}p_3 \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{2}{6}p_3 \\ p_3 &= \frac{3}{4}p_4 \\ p_4 &= \frac{1}{2}p_5 + \frac{3}{8}p_4 \\ p_4 &= \frac{4}{5}p_5 \end{aligned}$$

Všimněme si, že $p_i = \frac{i}{i+1}p_{i+1}$. Dokažme toto tvrzení obecně indukcí.

Zjevně pro $i = 1$ tvrzení platí.

Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tj. $p_{k-1} = \frac{k-1}{k}p_k$, pak

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1} \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{k}p_k \right) \\ \frac{k+1}{2k}p_k &= \frac{1}{2}p_{k+1} \\ p_k &= \frac{k}{k+1}p_{k+1} \end{aligned}$$

tím je tvrzení dokázáno. Odtud dostáváme, že $p_{n-1} = \frac{n-1}{n}p_n = \frac{n-1}{n}$. Sečtením všech rovnic původní soustavy dostáváme

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_{n-1}) = \frac{1}{2},$$

tedy $p_1 = 1 - p_{n-1}$. Odtud

$$p_1 = \frac{1}{n}.$$

■

Příklad 5.3.

- (a) V každém vrcholu pravidelného 2016úhelníku leží právě jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout
- na 32 hromádek po 63 mincích,
 - na 16 hromádek po 126 mincích,
 - na 63 hromádek po 32 mincích.
- (b) Místo 2016úhelníku nyní uvažujte pravidelný n -úhelník a rozhodněte, pro která $r, s \in \mathbb{N}$, $r \cdot s = n$, je možné mince přesunout
- na r hromádek po s mincích.

Řešení. Budeme řešit druhou část (první z ní pak plyne). Rozebereme případy dle parity čísel r, s .

- Jestliže $2 \nmid s$, pak rozdělíme n -úhelník na r „výsečí“ délky s , kde „výsečí“ rozumíme s po sobě jdoucích vrcholů. Protože je délka této „výseče“ lichá, stačí přesouvat mince zároveň od obou krajů směrem ke středovému vrcholu. Každý přesun jedné dvojice mincí posouvá jednu minci ve směru a druhou proti směru hodinových ručiček (tj. tuto úvahu skutečně můžeme udělat pro každou výseč zvlášť). Každá „výseč“ nám pak dá jednu hromádku po s mincích, celkem nám všechny výseče dají požadovaných r hromádek po s mincích.
- Jestliže $2 \mid r$, pak uvažme osu souměrnosti tohoto mnohoúhelníka, která neprochází žádným vrcholem. Tím se nám mnohoúhelník rozpadne na dvě části. Když posuneme minci v jedné části a v druhé uděláme osově souměrný posun, bude právě jeden z těchto posunů ve směru hodinových ručiček. Díky tomu stačí v jedné polovině posouvat mincemi naprosto libovolně tak, abychom dostali $\frac{r}{2}$ hromádek po s mincích a v druhé polovině nám příslušné osově souměrné posuny dají totéž. Tím získáme r hromádek po s mincích.
- Jestliže $2 \nmid r$ a $2 \mid s$, pak budeme chtít dokázat, že mince přesunout požadovaným způsobem nelze. Označme vrcholy po řadě $1, 2, \dots, n$, dále $m(i)$ nechť je počet mincí ve vrcholu i a dokonce

$$S = \sum_{i=1}^n i \cdot m(i).$$

Protože v každém kroku jednu minci posuneme po směru a jednu proti směru hodinových ručiček, hodnota S se modulo n nemění (tj. zbytek po dělení čísla S číslem n se posunutím mincí nemění). Snadno spočítáme počáteční hodnotu S jako

$$S_1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

a hodnotu S pro situaci, kdy máme r hromádek po s mincích jako

$$S_2 = s \sum_{i=1}^r x_i,$$

kde $x_1, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ říkají, ve kterých vrcholech se tyto hromádky nacházejí. Kdyby přesunout mince požadovaným způsobem šlo, pak čísla S_1 a S_2 dávají stejný zbytek po dělení číslem n , tj. platí $n \mid S_1 - S_2$. Odtud bychom dostali

$$\begin{aligned} n \mid \frac{n(n+1)}{2} - s \sum_{i=1}^r x_i &\Leftrightarrow rs \mid \frac{rs(rs+1)}{2} - s \sum_{i=1}^r x_i \Leftrightarrow 2r \mid r(rs+1) - 2 \sum_{i=1}^r x_i \\ &\Rightarrow 2 \mid r(rs+1) - 2 \sum_{i=1}^r x_i \Rightarrow 2 \mid r(rs+1) \end{aligned}$$

což je spor (vždyť $2 \nmid r$ a $2 \mid s$).

■

Příklad 5.4. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která jsou čísla p_{n-1} , p_n a p_{n+1} sudá.

Řešení. Označme postupně $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$, $(bb)_n$ počet vyhovujících slov délky n končících na aa , ab , ba , bb . Snadno rozmyslíme, že pro $n \geq 3$ platí

$$\begin{aligned}(aa)_n &= (ba)_{n-1} \\ (ba)_n &= (bb)_{n-1} \\ (bb)_n &= (ab)_{n-1} \\ (ab)_n &= (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1}\end{aligned}$$

a navíc vidíme, že pro $n \geq 2$ můžeme p_n spočítat jako

$$p_n = (aa)_n + (ab)_n + (ba)_n + (bb)_n.$$

To nám dohromady s počátečními podmínkami

$$p_1 = 2, \quad (aa)_2 = (ab)_2 = (ba)_2 = (bb)_2 = 1$$

dává rekurentní vzorec pro výpočet p_n . Protože nás zajímá jen parita p_n podívejme se na prvních několik hodnot $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$, $(bb)_n$, p_n modulo 2 (tj. na zbytky po dělení dvěma).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$(aa)_n$	-	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
$(ba)_n$	-	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
$(bb)_n$	-	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
$(ab)_n$	-	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
p_n	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Všimněme si, že pro $n = 17$ se nám zopakoval sloupec $n = 2$. Z rekurentní formule je zřejmé, že i následující sloupce se budou opakovat (s periodou 15). Nyní chceme nalézt ve spodním řádku tři po sobě jdoucí nuly (které odpovídají sudým číslům p_n). Odtud dostáváme řešení

$$n \equiv 10 \pmod{15}, \quad n = 15k + 10, \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0.$$

Na závěr poznamenejme, že kdybychom připustili, že $p_0 = 0$, pak je i $n = 1$ řešením.

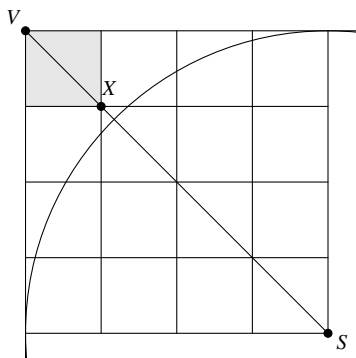
Řešme nyní návodnou úlohu. Dosadíme do rekurentních vztahů pro $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$ a $(bb)_n$. Pro $n \geq 2$ platí:

$$\begin{aligned}(aa)_{n+2} &= (ba)_{n+1} = (bb)_n \\ (ba)_{n+2} &= (bb)_{n+1} = (ab)_n \\ a_n &= (aa)_n + (ba)_n \\ p_n &= (aa)_n + (ba)_n + (ab)_n + (bb)_n = a_n + (ba)_{n+2} + (aa)_{n+2} = a_n + a_{n+2}.\end{aligned}$$

■

Příklad 5.5. Je dáno 1300 bodů uvnitř jednotkové koule. Dokažte, že existuje koule o poloměru $\frac{2}{9}$, uvnitř které leží aspoň 4 dané body.

Řešení. Uvažujme krychli o hraně délky 2, do níž je vepsána daná koule o poloměru 1. Tuto krychli rozdělíme na $8^3 = 512$ shodných krychliček, z nichž každá má hranu délky $\frac{1}{4}$. Každou z krychliček lze vepsat do koule o poloměru $\frac{2}{9}$, neboť polovina délky tělesové úhlopříčky $\frac{1}{8}\sqrt{3} < \frac{2}{9}$. Uvažujme řez viz obrázek 5.3.



Obrázek 5.3: Řez

Protože

$$|SX| = \frac{3}{4}|SV| = \frac{3}{4}\sqrt{2} > 1,$$

nemá žádná z malých krychliček, které leží podíl hran větší krychle, žádný společný bod s danou jednotkovou koulí. Těchto krychliček je celkem $6 \cdot 12 + 8 = 80$. Ve sjednocení zbylých 432 krychliček tedy leží celá daná jednotková koule.

Protože všech 1300 daných bodů leží uvnitř těchto 432 krychliček a $1300 = 432 \cdot 3 + 4$, existuje mezi nimi podle Dirichletova principu aspoň jedna, která obsahuje aspoň 4 z daných bodů, přičemž, jak víme, můžeme takovou krychličku vepsat do koule o poloměru $\frac{2}{9}$. ■

Příklad 5.6. Určete počet rozmístění k věží na šachovnici $n \times n$ tak, aby aspoň jedna z nich byla neohrožená a žádné dvě nestály v témže sloupci.

Řešení. Pro $k > n$ zřejmě žádné rozmístění neexistuje.

Dále nechť $k \leq n$.

Sloupce $s_1, \dots, s_k$, v nichž budou věže umístěny, lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Zbývá určit, kolika způsoby lze rozmístit k věží na šachovnici o n řádcích a k sloupcích $s_1, \dots, s_k$ tak, aby v každém sloupci stála právě jedna věž a zároveň alespoň v jedno z řádků stála právě jedna věž. Pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ označme T_i množinu všech takových rozmístění věží, kdy v i -tém řádku, a v každém sloupci, stojí právě jedna věž. Všechna povolená rozmístění pak tvoří množinu $T_1 \cup \dots \cup T_k$. Pro $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq k$ množina $T_{j_1} \cap \dots \cap T_{j_r}$ obsahuje ta rozmístění, kde v r pevně vybraných řádcích stojí vždy právě jedna věž.

Pro $r \leq k$ můžeme vybrat sloupce, na kterých budou věže stát $k \cdot (k-1) \cdots (k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!}$ způsoby. Zbylých $k-r$ věží můžeme umístit po jedné na zbylé sloupce, libovolně na zbylých $n-r$ řádků, což můžeme udělat $(n-r)^{k-r}$ způsoby, přičemž pro $r = k = n$ klademe $0^0 = 1$. Celkem

$$|T_{j_1} \cap \dots \cap T_{j_r}| = \frac{k!}{(k-r)!} (n-r)^{k-r}.$$

Dále pro $r > k$ zřejmě žádné takové rozmístění neexistuje, tedy $T_{j_1} \cap \dots \cap T_{j_r} = \emptyset$.

Celkem pak ze speciálního případu principu inkluze a exkluze dostáváme

$$|T_1 \cup \dots \cup T_k| = \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{k!}{(k-r)!} (n-r)^{k-r}.$$

Hledaný počet všech rozmístění je pak

$$\binom{n}{k} \cdot \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{k!}{(k-r)!} (n-r)^{k-r}.$$

■

Kapitola 6

Invarianty a monovarianty

6.1 Teorie

Invariantem rozumíme něco, co se nemění. Používáme ho většinou v příkladech, kdy máme nějaký počáteční stav a operaci, kterou s ním můžeme udělat. Invariantem je pak nějaká vlastnost či hodnota, kterou tato operace zachovává. Tedy pokud tuto vlastnost či hodnotu má počáteční stav, musí jí mít i všechny stavy následující. Zejména tedy nemůžeme dosáhnout stavu, který tuto vlastnost či hodnotu nemá.

Monovariantem rozumíme nějakou vlastnost operace, která hodnotu na rozdíl od invariantu mění, ale pouze monotónně. Pokud operace například tuto hodnotu nezvyšuje, nemůžeme nikdy dosáhnout hodnoty větší, než má na začátku.

Uveďme několik hodnot, které jsou často užitečné:

- součet čísel, případně součet modulo n (pro vhodné $n \in \mathbb{N}$);
- součet druhých mocnin (geometricky kvadrát vzdálenosti od počátku);
- další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců rozdílů, ...;
- počet nějakých jevů, případně modulo n .

6.2 Příklady

Příklad 6.1. Necht' $d(n)$ značí ciferný součet čísla $n \in \mathbb{N}$. Vyřešte rovnici $n + d(n) + d(d(n)) = 2015$.

Řešení. Jak je známo z důkazu kritéria dělitelnosti třemi, dává ciferný součet čísla stejný zbytek po dělení třemi jako toto číslo samotné. Řečí kongruencí $n \equiv d(n) \equiv d(d(n)) \pmod{3}$. Je zřejmé, že sečteme-li tři čísla, která dávají stejný zbytek po dělení třemi, dostaneme číslo dělitelné třemi. Tedy $3 \mid n + d(n) + d(d(n))$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, zatímco $3 \nmid 2015$. Rovnice tak nemá řešení. ■

Příklad 6.2. Každé z čísel $a_1, \dots, a_n$ je $+1$ nebo -1 a platí $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Řešení. Rozmysleme, co se stane s S , pokud nahradíme a_i za $-a_i$. Číslo a_i se vyskytuje právě ve čtyřech z n sčítanců, u kterých se tímto změni znaménko. Jsou-li původně dva kladné a dva záporné, součet S se nezmění. Mají-li tři stejné znaménko a čtvrtý opačné, změní se S o ± 4 . A pokud mají všechny čtyři stejné znaménko, změní se S o ± 8 . Vůči této záměně je tedy součet S invariantní modulo 4.

Na začátku máme $S = 0$, tedy $S \equiv 0 \pmod{4}$. Budeme-li postupně nahrazovat všechny -1 za 1 , nejen, že nakonec $S \equiv 0 \pmod{4}$ zůstane, ale bude i $S = n$. Neboli $4 \mid n$. ■

Příklad 6.3. Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0,6a - 0,8b$ a $0,8a + 0,6b$. Můžeme někdy dostat množinu

- $\{4, 6, 12\}$;
- $\{x, y, z\}$ kde $|x - 4|, |y - 6|, |z - 12| < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

Řešení. Uvažme pro množinu $\{a, b, c\}$ funkci $P = a^2 + b^2 + c^2$ („kvadrát vzdálenosti této množiny od počátku“). Provedeme-li povolenou operaci, dostaneme novou množinu, pro kterou je $P_{\text{new}} = (0,6a - 0,8b)^2 + (0,8a + 0,6b)^2 + c^2 = 0,36a^2 - 0,96ab + 0,64b^2 + 0,64a^2 + 0,96ab + 0,36b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = P_{\text{old}}$. Funkce P je tedy invariantem vůči této operaci.

Na začátku $P_0 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

- Na konci by bylo $P_a = 4^2 + 6^2 + 12^2 = 196 = 14^2 \neq P_0$, proto tuto množinu nikdy nemůžeme dostat.
- Nyní využijeme geometrickou představu. Víme, že se pohybujeme pouze po sféře se středem v počátku a poloměrem 13 j, a chceme se dostat do vnitřku koule se středem v $\{4, 6, 12\}$ a poloměrem 1 j. Jak víme z a), leží tento střed na sféře se středem v počátku a poloměrem 14 j. Příslušné sféry se tedy pouze dotýkají a průnik s vnitřkem koule je prázdný. Takovou množinu tedy opět nemůžeme dostat.

■

Příklad 6.4. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 2n$ (n je liché přirozené). Můžeme smazat libovolná dvě čísla a, b a místo nich napsat $|a - b|$. Toto opakujeme. Dokažte, že poslední zbylé číslo je liché.

Řešení. Uvažme součet S čísel napsaných na tabuli. Na začátku $S = 1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1)$. Vidíme, že S je liché. Odebráním čísel a, b a vrácením $|a - b|$ snížíme součet o $2 \min(a, b)$, což je však sudé číslo, tedy S zůstane liché. Postupným mazáním se tedy parita S nezmění a na konci zbude liché číslo.

■

Příklad 6.5. Je možné seřadit čísla $1, 1, 2, 2, \dots, 2015, 2015$ tak, aby mezi každými dvěma čísly i bylo právě $i - 1$ dalších čísel?

Řešení. Řešme tento problém obecněji a nahraďme 2015 za n . Označme p_k první pozici přirozeného čísla k . Druhé k tak má pozici $p_k + k$. Sečteme-li pozice všech čísel, jednou jak jdou za sebou, jednou podle jejich velikostí. Dostaneme tak rovnost $1 + \dots + 2n = (p_1 + p_1 + 1) + \dots + (p_n + p_n + n)$. Označíme-li $P = \sum_{i=1}^n p_i$, máme rovnost $2P = (n + 1) + \dots + 2n = \frac{n(3n+1)}{2}$, odkud $P = \frac{n(3n+1)}{4}$. Protože $P \in \mathbb{N}$, musí $4 \nmid n(3n + 1)$, což nastává právě tehdy, když $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$, což je nutnou podmínkou. Jelikož však $2015 \equiv 3 \pmod{4}$, není tato nutná podmínka splněna a takové seřazení neexistuje.

■

Příklad 6.6. Ve vrcholech pětiúhelníku jsou napsána celá čísla x_i , $i = 1, \dots, 5$, taková, že $\sum_{i=1}^5 x_i > 0$. Jestliže x, y, z jsou čísla ve třech vedlejších vrcholech pětiúhelníku a $y < 0$, pak nahrazujeme (x, y, z) za $(x + y, -y, y + z)$. Toto opakujeme tak dlouho, dokud existuje $y < 0$. Rozhodněte, zda tento algoritmus někdy skončí.

Řešení. Uvažme nezápornou celočíselnou funkci

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^5 (x_i - x_{i+2})^2, \quad x_6 = x_1, \quad x_7 = x_2.$$

BÚNO předpokládejme, že nyní $y = x_4 < 0$. Tedy

$$\begin{aligned} f_{old} &= (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 \\ f_{new} &= (x_1 - x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 + x_4 - x_4 - x_5)^2 + (-x_4 - x_1)^2 + (x_4 + x_5 - x_2)^2 \\ f_{new} &= (x_1 - x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 + x_1)^2 + (x_4 + x_5 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Odtud $f_{new} - f_{old} = 2x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$. Protože $x_4 < 0$ a $\sum_{i=1}^5 x_i > 0$, je $f_{new} - f_{old} < 0$, neboli $f_{new} < f_{old}$. Budeme-li tedy postupně aplikovat algoritmus a v každém kroku vyhodnotíme funkci f , dostaneme klesající posloupnost nezáporných celých čísel $f_0 > f_1 > f_2 > \dots$. Jak víme, neexistuje nekonečná klesající posloupnost nezáporných celých čísel, čili tento algoritmus musí jednou skončit. ■

Příklad 6.7. Řešte rovnici $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$.

Řešení. Jde o hledání kořenů polynomu čtvrtého stupně $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$, což je obecně náročný problém. Šlo by zde sice snadno najít racionální kořeny, ale my touto cestou nepůjdeme.

Označme $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Řešíme tedy rovnici $f(f(x)) = x$, neboli hledáme pevné body složeného zobrazení $f \circ f$. Je zřejmé, že je-li x pevný bod zobrazení f , pak je i pevným bodem zobrazení f^n pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že naopak to neplatí, f^n může a nemusí mít několik pevných bodů navíc oproti f .

Nejprve určíme pevné body zobrazení f .

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x - 1)(x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Z předchozího tak víme, že náš polynom má kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Můžeme jej tedy vydělit polynomm $x^2 - 4x + 3$. Dostaneme $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Jednička je tedy trojnásobným kořenem, trojka jednonásobným. ■

Příklad 6.8. Můžeme dostat polynom $h(x) = x$ z polynomů $f(x)$ a $g(x)$ pouze pomocí operací sčítání, odčítání a násobení polynomů, když

- a) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 2$;
- b) $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = 2x$;
- c) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 2$?

Řešení. Pomocí těchto tří operací dostaneme „polynom dvou polynomiálních proměnných s celočíselnými koeficienty“, přičemž musí platit

$$P(f(x), g(x)) = x \quad (6.1)$$

pro každé x . Podívejme se po hodnotách x , pro která rovnost (??) nemůže být splněna. Zde využijeme ty, pro které jsou si hodnoty polynomů rovny.

- a) Zde $f(2) = g(2) = 6$. Pomocí těchto tří operací tak dostaneme polynom, který má ve dvojce hodnotu dělitelnou šesti, ovšem $6 \nmid 2$. Zde z nich tedy polynom $h(x) = x$ nedostaneme.
- b) Zde $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = 1$. Pomocí těchto tří operací tak dostaneme polynom, který má v $\frac{1}{2}$ celočíselnou hodnotu, ovšem $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Zde z nich tedy polynom $h(x) = x$ nedostaneme.
- c) Zde „bohužel“ žádné takové x nenalezneme, a nezbyvá nám tak nic jiného, než přijít na to, že platí rovnost

$$(f - g)^2 + 2g - 3f = x. \quad \blacksquare$$

Příklad 6.9. Na kvadratickém polynomu $ax^2 + bx + c$ jsou povoleny následující operace

- a) prohození a a c ;
- b) nahrazení x za $x + t$, kde $t \in \mathbb{R}$ libovolné.

Můžeme opakováním těchto dvou operací převést $x^2 - x - 2$ na $x^2 - x - 1$?

Řešení. Zkoumejme, co tyto dvě operace dělají s diskriminantem $D = b^2 - 4ac$.

Je zřejmé, že prohození a a c D nezmění.

Druhá operace zřejmě nemění rozdíl kořenů polynomu. Využijme Vietovy vztahy $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ a $\frac{c}{a} = x_1 x_2$, abychom diskriminant převedli do vhodnějšího tvaru.

$$D = b^2 - 4ac = a^2 \left[\left(-\frac{b}{a} \right)^2 - 4\frac{c}{a} \right] = a^2 \left((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \right) = a^2 (x_1 - x_2)^2.$$

Tedy i zde se D nemění.

Celkem jsme tak dokázali, že je diskriminant invariantní vůči těmto dvěma operacím.

Chceme převést polynom s $D_1 = 9$ na polynom s $D_2 = 5$, což kvůli $D_1 \neq D_2$ nelze. ■

Příklad 6.10. Uvažme libovolné binární slovo $W = a_1 a_2 \dots a_n$. To můžeme transformovat vložním, smazáním či připojením slova XXX , kde X je libovolné binární slovo. Můžeme těmito transformacemi převést slovo $W = 01$ na 10 ?

Řešení. Zaved' me na binárních slovech funkci $I(W) = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$. Je-li $X = x_1 x_2 \dots x_s$, pak má podslovo XXX , začínající na pozici r , „hodnotu“ $[rx_1 + (r+1)x_2 + \dots + (r+s-1)x_s] + [(r+s)x_1 + (r+s+1)x_2 + \dots + (r+2s-1)x_s] + [(r+2s)x_1 + (r+2s+1)x_2 + \dots + (r+3s-1)x_s] = (3r+3s)x_1 + (3r+3s+3)x_2 + \dots + (3r+6s-3)x_s = 3[(r+s)x_1 + (r+s+1)x_2 + \dots + (r+2s-1)x_s]$, tedy hodnotu dělitelnou třemi. Proto, převedeme-li slovo W na slovo $Z = b_1 b_2 \dots b_m$ pomocí vložení, smazání či připojení slova XXX , platí $I(W) \equiv I(Z) \pmod{3}$. Jelikož $I(01) = 2$ a $I(10) = 1$, žádná taková transformace neexistuje. ■

Příklad 6.11. Mějme celá čísla a, b, c a d , ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě libovolně velká.

Řešení. Označme $P_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ čtveřici po n krocích. Uvažujme kvadrát vzdálenosti P_n od počátku, tj. $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$. Zkoumejme, jaký je vztah mezi P_{n+1} a P_n .

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Z předpisu je zřejmé, že $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Umocněním této rovnosti dostaneme

$$0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2a_nb_n + 2a_nd_n + 2b_nc_n + 2c_nd_n. \quad (6.3)$$

Sečtením rovností (6.2) a (6.3), dostaneme

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2, \\ a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &\geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \end{aligned}$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2^{n-1} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2).$$

Jelikož a, b, c a d , nejsou všechna stejná, je po prvním kroku alespoň jedno z čísel a_1, b_1, c_1, d_1 nenulové, čili $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 > 0$. Proto součet $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ roste se zvyšujícím se n nade všechny meze, z čehož plyne, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě libovolně velká. ■

Příklad 6.12. Mějme dvojici posloupností (x_n, y_n) , které jsou definovány rekurentně předpisy

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}$$

a počáteční podmínkou $0 < x_0 < y_0$. Dokažte, že tyto posloupnosti mají společnou limitu a určete ji.

Řešení. Uvědomme si, že při daných počátečních podmínkách jde o dvě posloupnosti kladných reálných čísel.

Nejprve ukažme několik věcí „navíc“. Za prvé, že při těchto předpisech platí implikace $x_n < y_n \Rightarrow x_{n+1} < y_{n+1}$.

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{2y_n}{2} = y_n.$$

Dělejme pouze úpravy nemění znaménko nerovností.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &? y_{n+1} \\ x_{n+1} &? \sqrt{x_{n+1}y_n} \\ \sqrt{x_{n+1}} &? \sqrt{y_n} \\ x_{n+1} &< y_n \end{aligned}$$

Proto platí nejen $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} > \frac{2x_n}{2} = x_n$, ale i $y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n} < \sqrt{y_{n+1}y_n} \Rightarrow \sqrt{y_{n+1}} < \sqrt{y_n} \Rightarrow y_{n+1} < y_n$.

Za druhé dokažme

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} - x_{n+1} &< \frac{y_n - x_n}{4}. \\
 y_{n+1} - x_{n+1} &? \frac{y_n - x_n}{4} \\
 \sqrt{\frac{x_n + y_n}{2}} y_n - \frac{x_n + y_n}{2} &? \frac{y_n - x_n}{4} \\
 \sqrt{\frac{x_n + y_n}{2}} \sqrt{y_n} &? \frac{y_n - x_n}{4} + \frac{2(x_n + y_n)}{4} \\
 \sqrt{\frac{x_n + y_n}{2}} \sqrt{y_n} &? \frac{3y_n + x_n}{4} \\
 \frac{x_n + y_n}{2} y_n &? \frac{9y_n^2 + 6y_n x_n + x_n^2}{16} \\
 8x_n y_n + 8y_n^2 &? 9y_n^2 + 6y_n x_n + x_n^2 \\
 0 &? y_n^2 - 2y_n x_n + x_n^2 \\
 0 &< (y_n - x_n)^2
 \end{aligned}$$

Toto nám ukazuje, jak se tyto posloupnosti vyvíjejí s rostoucím n , i že mají společnou limitu. Nebylo to ale nutné, neb to dokážeme v samotném hledání oné limity.

Uvažme podíl

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1} y_n}} = \sqrt{\frac{x_{n+1}}{y_n}} = \sqrt{\frac{\frac{x_n + y_n}{2}}{y_n}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{x_n}{y_n}}{2}}. \quad (6.4)$$

Toto připomíná vztah pro kosinus polovičního úhlu $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$.

Protože $0 < \frac{x_n}{y_n} < 1$, můžeme označit $\frac{x_n}{y_n} = \cos \alpha_n$. Pak ze vztahu (6.4) dostáváme

$$\cos \alpha_{n+1} = \cos \frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_n = \frac{\alpha_0}{2^n} \Rightarrow 2^n \alpha_n = \alpha_0,$$

což můžeme napsat i ve tvaru

$$2^n \arccos \frac{x_n}{y_n} = \arccos \frac{x_0}{y_0}.$$

Protože v limitě pro $n \rightarrow \infty$ jde $2^n \rightarrow \infty$, zatímco pravá strana je konečná, musí jít $\arccos \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1$. Tímto jsme dokázali, že mají společnou limitu.

Dále počítejme

$$y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 = \frac{x_n + y_n}{2} y_n - \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right)^2 = \frac{x_n y_n + y_n^2}{2} - \frac{x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2}{4} = \frac{y_n^2 - x_n^2}{4}$$

Odtud

$$2\sqrt{y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{y_n^2 - x_n^2} \Rightarrow 2^n \sqrt{y_n^2 - x_n^2} = \sqrt{y_0^2 - x_0^2}.$$

Připomeňme, že pro $s = \sqrt{1 - t^2}$, platí $\arccos t = \arcsin s$. Zejména pak pro $t = \frac{x_n}{y_n}$ a $s = \frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{y_n}$.

Celkem

$$\arccos \frac{x_0}{y_0} = 2^n \arccos \frac{x_n}{y_n} = 2^n \arcsin \frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{y_n} = 2^n \arcsin \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_n}.$$

Levá strana je konstantní, zatímco v pravé pro $n \rightarrow \infty$ jde $2^n \rightarrow \infty$, tedy $\arcsin \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_n} \rightarrow 0$. Můžeme tak v limitě arcussinus nahradit jen jejím argumentem. Proto, když $y_n \rightarrow L$, platí

$$\arccos \frac{x_0}{y_0} = 2^n \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n L} = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{L}.$$

Hledaná společná limita je tedy

$$L = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos \frac{x_0}{y_0}}.$$

■

Kapitola 7

Posloupnosti

7.1 Teorie

Definice 7.1. *Posloupností (reálných čísel)* rozumíme zobrazení $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Hodnoty se místo $a(n)$ značí obvykle a_n . Celou posloupnost zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$, případně (a_n) . Hodnotu a_n nazýváme *n-tý člen posloupnosti*.

Poznámka 7.2. Posloupnost lze zadat rekurentním vzorcem (spolu s tzv. počátečními podmínkami), například

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + 1,\end{aligned}$$

explicitním vzorcem pro *n*-tý člen, například

$$a_n = 2^n - 1.$$

7.1.1 Aritmetická posloupnost

Definice 7.3. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *aritmetická*, jestliže $\exists d \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d se nazývá *diferencí* aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 7.4. *Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí d . Pak platí:*

- $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_1 + (n-1)d$
- $\forall r, s \in \mathbb{N}: a_r = a_s + (r-s)d$
- označíme-li $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ součet prvních n členů, pak

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Věta 7.5. *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí*

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

7.1.2 Diferenční rovnice

Diference $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$. Opakem je sumace: $\Delta a(n) = b(n)$ pak $\sum b(n) = a(n)$. Obecně je výsledkem sumace množina všech řešení, lišící se o konstantu, podobně jako u integrálu.

Vlastnosti difference a sumace:

$$\begin{aligned}\Delta(a_n + b_n) &= \Delta a_n + \Delta b_n & \sum(a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n \\ \Delta(c \cdot a_n) &= c \cdot \Delta a_n & \sum(c \cdot a_n) &= c \sum a_n \\ \Delta(a_n \cdot b_n) &= (\Delta a_n) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot \Delta b_n & \sum a_n \cdot \Delta b_n &= a_n \cdot b_n - \sum(\Delta a_n) \cdot b_{n+1} \\ \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{(\Delta a_n) \cdot b_n - a_n \cdot \Delta b_n}{b_n b_{n+1}}\end{aligned}$$

Vztahy ($q \neq 1$, P_k, Q_k polynomy stupně k):

$$\begin{aligned}\Delta c &= 0 \\ \Delta n &= 1 \\ \Delta n^k &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^i \\ \Delta P_k(n) &= Q_{k-1}(n) & \sum P_k(n) &= Q_{k+1}(n) + c \\ \Delta q^n &= (q-1)q^n & \sum q^n &= \frac{q^n}{q-1} + c \\ \Delta q^n P_k(n) &= q^n Q_k(n) & \sum q^n P_k(n) &= q^n Q_k(n) + c\end{aligned}$$

Homogenní diferenční rovnice 1. řádu

$$y(n+1) = p(n)y(n).$$

$$\text{Řešení } y(n) = y(1) \prod_{k=1}^{n-1} p(k) = c \prod_{k=1}^{n-1} p(k).$$

Nehomogenní

1. $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) = r(n)$, pak $y(n) = \sum r(n) + c$;
2. $y(n+1) - p(n)y(n) = r(n)$, pak řešení je ve tvaru řešení příslušné zhomogenizované rovnice $u(n+1) = p(n)u(n)$ a jednoho řešení partikulárního, které hledáme ve tvaru $y_p(n) = u(n)v(n)$.

Homogenní diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y(n+2) + ay(n+1) + by(n) = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ má

1. dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak $y(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$;
2. reálný dvojnásobný kořen λ , pak $y(n) = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n$;
3. komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$, pak $y(n) = r^n(c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi)$.

Součet prvních n členů posloupnosti

$$\begin{aligned}s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ s_{n+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \\ \Delta s_n &= s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \\ s_n &= \sum a_{n+1}, \quad s_1 = a_1\end{aligned}$$

7.2 Příklady

Příklad 7.1. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí aritmetickou posloupnost přirozených čísel.

- Nalezněte příklad posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která obsahuje nekonečně mnoho k -tých mocnin přirozených čísel pro všechna $k = 2, 3, \dots$
- Nalezněte příklad posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která neobsahuje žádnou k -tou mocninu přirozeného čísla pro žádné $k = 2, 3, \dots$
- Nalezněte příklad posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečně mnoho třetích mocnin přirozených čísel.
- Dokažte, že pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a všechna přirozená čísla $k \geq 2$ platí: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ buď neobsahuje žádnou k -tou mocninu přirozeného čísla, nebo jich obsahuje nekonečně mnoho.

Řešení.

- Stačí uvážit například posloupnost $a_1 = 1, d = 1$.
- Stačí uvážit například posloupnost $a_1 = 2, d = 4$. Pro n -tý člen dostáváme $a_n = 2 + 4(n-1) = 2 \cdot (2n-1)$. V rozkladu na prvočísla je dvojka vždy v první mocnině, proto žádný člen nemůže být k -tou mocninou přirozeného čísla.
- Stačí uvážit například posloupnost $a_1 = 8, d = 16$. Pro n -tý člen dostáváme $a_n = 8 + 16(n-1) = 8 \cdot (2n-1)$. V rozkladu na prvočísla je dvojka vždy v třetí mocnině, proto žádný člen nemůže být druhou mocninou přirozeného čísla. Protože $2n-1$ pro $n \in \mathbb{N}$ proběhne všechna lichá čísla, jistě bude v této posloupnosti nekonečně mnoho (dokonce všechny) třetích mocnin přirozených čísel.
- Necht' posloupnost obsahuje nějakou k -tou mocninu přirozeného čísla m , tj. pro vhodné $n \in \mathbb{N}$ platí $m^k = a_1 + n \cdot d$. Ukažme, že v této posloupnosti budou ležet i čísla $(m+d)^k, (m+2d)^k, \dots$. Uvažme obecný člen z těchto k -tých mocnin a s využitím binomické věty ho rozepišme:

$$(m+td)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} m^{k-i} (td)^i = m^k + d \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} m^{k-i} t^i d^{i-1}}_N = m^k + dN = a_1 + (n+N)d.$$

■

Příklad 7.2. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí aritmetickou posloupnost celých čísel. Kolik existuje aritmetických posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že $a_i = 1$, $a_j = 2015$ pro nějaké indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, 20\}$?

Řešení. Nejprve určíme všechny možné difference. Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost celých čísel, musí být difference $d \in \mathbb{Z}$. Víme, že $a_i = a_j + (i - j)d$, odtud $d = \frac{a_i - a_j}{i - j} = \frac{2014}{i - j}$. Vidíme, že $d \mid 2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, navíc $1 \leq |i - j| \leq 19$. Odtud $d \in \{\pm 2014, \pm 1007, \pm 106\}$. Jednotlivé případy rozebereme

- $d = 2014$, pak $j = i + 1$. Aby $i, j \in \{1, 2, \dots, 20\}$, musí $i \in \{1, \dots, 19\}$. Podobně pro $d = -2014$ je $j = i - 1$ a tedy $i \in \{2, \dots, 20\}$.
- $d = 1007$, pak $j = i + 2$. Podobně jako výše dostáváme $i \in \{1, \dots, 18\}$. Pro $d = -1007$ máme $i \in \{3, \dots, 20\}$.
- $d = 106$, pak $j = i + 19$, nutně tedy $i = 1$, $j = 20$. Pro $d = -106$ máme $i = 20$ a $j = 1$.

Celkem dostáváme 76 možných posloupností. ■

Příklad 7.3. Uvažujme dvě aritmetické posloupnosti reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, které mají stejný první člen (tj. $x_1 = y_1$) a existuje index $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takový, že

- $x_k^2 - y_k^2 = 53$,
- $x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78$,
- $x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27$.

Nalezněte všechny přípustné hodnoty indexu k .

Řešení. Označme c, d difference zadaných posloupností. Dostáváme vyjádření

$$x_i = x_1 + (i - 1)c \quad y_i = x_1 + (i - 1)d.$$

Vypočteme rozdíl $x_i^2 - y_i^2$

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= \left(x_1^2 + 2x_1(i-1)c + (i-1)^2 c^2 \right) - \left(x_1^2 + 2x_1(i-1)d + (i-1)^2 d^2 \right) = \\ &= 2x_1(i-1)(c-d) + (i-1)^2(c^2 - d^2). \end{aligned}$$

Ze zadání tak dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 53 &= 2x_1(k-1)(c-d) + (k-1)^2(c^2 - d^2), \\ 78 &= 2x_1(k-2)(c-d) + (k-2)^2(c^2 - d^2), \\ 27 &= 2x_1k(c-d) + k^2(c^2 - d^2), \end{aligned}$$

což je vlastně soustava tří nelineárních rovnic o třech neznámých $x_1(c-d)$, $c^2 - d^2$ a k , z nichž nám stačí určit jen tu poslední. Jednoduše se dokážeme zbavit proměnné $x_1(c-d)$, když od dvojnásobku první rovnice odečteme rovnice zbývající. Dostáváme

$$1 = \left(2(k-1)^2 - (k-2)^2 - k^2 \right) \cdot (c^2 - d^2) = -2 \cdot (c^2 - d^2)$$

Odtud $c^2 - d^2 = -\frac{1}{2}$. Dosazením do druhé a třetí rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} 78 &= 2x_1(k-2)(c-d) - \frac{1}{2}(k-2)^2, \\ 27 &= 2x_1k(c-d) - \frac{1}{2}k^2. \end{aligned}$$

Opět se zbavme členů s $x_1(c-d)$.

$$\begin{aligned} 78k - 27(k-2) &= -\frac{1}{2}(k(k-2)^2 - k^2(k-2)) \\ 102k + 108 &= k^3 - 2k^2 - k^3 + 4k^2 - 4k \\ 0 &= k^2 - 53k - 54 \\ 0 &= (k+1)(k-54) \end{aligned}$$

Protože $k \in \mathbb{N}$, je jediným řešením $k = 54$. ■

***Příklad 7.4.** Vypočítejte limity posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které jsou zadány vzorcem pro n -tý člen

- $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$
- $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots+2n-1-2n}{\sqrt{n^2+1}}$
- $a_n = n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n)$

Řešení.

- Protože $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, můžeme limitu zadané posloupnosti psát jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

- Nejprve spočítáme

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n-1) &= n \frac{2n-1+1}{2} = n^2, \\ 2 + 4 + \dots + 2n &= n \frac{2n+2}{2} = n^2 + n. \end{aligned}$$

Nyní spočítáme samotnou limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = -1$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

■

Příklad 7.5. Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ všech možných délek k , pro které platí:

- $a_1 = 1$,
- $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$,
- $a_k = 255\,255$.

Řešení. Nejprve rozložíme číslo 255 255 na prvočísla

$$255\,255 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

Z podmínky $a_i \mid a_{i+1}$ dostáváme, že každý člen obsahuje v prvočíselném rozkladu stejná prvočísla jako člen předchozí a alespoň jeden navíc (aby posloupnost byla rostoucí). Stačí se tedy dívat, jaká prvočísla přibudou v rozkladu dalšího členu (vždy bude alespoň jedno) oproti členu předchozímu. Chceme tedy množinu $X = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ rozdělit do neprázdných podmnožin $X_1, X_2, \dots$, kde X_i značí, která prvočísla přibudou v rozkladu při přechodu od a_i k a_{i+1} .

Označme $P(n)$ počet rozdělení n -prvkové množiny do neprázdných podmnožin. Hodnotu $P(n)$ vyjádříme rekurentním vztahem. Každé rozdělení lze vyjádřit jako počet možností pro X_1 krát rozdělení zbytku. Musíme uvážit všechny možné velikosti j množiny X_1 . Tím dostáváme vztah

$$P(n) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} P(n-j),$$

kde jednička na začátku odpovídá situaci, kdy $X = X_1$ a není co dál rozdělovat, index j odpovídá velikosti množiny X_1 a $\binom{n}{j}$ je počet možností jak těchto j prvků do X_1 vybrat. Nyní snadno dopočítáme $P(6)$.

$P(1) = 1, P(2) = 3, P(3) = 13, P(4) = 75, P(5) = 541$ a konečně $P(6) = 4683$. ■

Příklad 7.6. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost přirozených čísel a pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je a_{n+1} o 1 větší než největší liché dělitel součtu $a_n + a_{n-1}$. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je (od určitého členu počínaje) periodická.

Řešení. Označme a^* největšího lichého dělitele čísla a .

- Pro každé $n \geq 3$ je a_n číslo sudé (vždyť je to číslo o 1 větší než liché dělitel nějakého čísla).
- Pro každé $n \geq 4$ je $a_{n+1} \leq \max\{a_n, a_{n-1}\}$.

$$a_{n+1} = 1 + (a_n + a_{n-1})^* \leq 1 + \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \leq 1 + \max\{a_n, a_{n-1}\}.$$

První nerovnost plyne ze sudosti čísel a_n a a_{n-1} , druhá je triviální. Proto je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená. Její největší člen je totiž jeden z prvních čtyř.

- Protože každý člen závisí pouze na dvou předchozích, dostáváme hned, že existence dvojic $(a_n, a_{n+1}) = (a_m, a_{m+1})$ pro $n < m$ nám dá periodicitu. Označíme-li M největší člen posloupnosti, pak každá dvojice (a_n, a_{n+1}) je tvaru (a, b) pro $a, b \in \{1, \dots, M\}$. Těchto dvojic je pouze M^2 , a proto se nějaká dvojice jistě bude muset opakovat. ■

Příklad 7.7. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nenulových celých čísel a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde číslo b_n má stejné znaménko jako číslo a_n , ale opačné pořadí číslic.

- Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je (od určitého členu počínaje) periodická.
- Dokažte, že první člen a_1 musí být alespoň čtyřciferné číslo.

Řešení.

- Protože hodnota n -tého členu závisí jen a pouze na členu předchozím, stačí nám ukázat, že se v posloupnosti nacházejí dvě stejná čísla. Odtud už hned plyne periodicitu. Ukážeme, že posloupnost je ohraničená. Protože hodnoty jsou celá čísla, bude jen konečně mnoho hodnot, kterých mohou členy posloupnosti nabývat. Proto se v této nekonečné posloupnosti budou nacházet dvě stejná čísla. Jestliže začneme s k -ciferným číslem, jistě bude každý člen posloupnosti nejvýše k -ciferné číslo, tedy $-10^k < a_n < 10^k$. Tímto máme dokázanu periodicitu.
- Žádný člen posloupnosti nemůže být číslem, které čteme zepředu stejně jako zezadu (zejména tedy ani jednociferným číslem), druhý člen by pak byl nulový, což nelze (máme posloupnost nenulových celých čísel). Jestliže začneme s dvouciferným číslem $10a + b$ bude druhý člen tvaru $9(a - b)$. Nyní stačí uvážit posloupnost kroků

$$90 - 9 \rightarrow 81 - 18 \rightarrow 63 - 36 \rightarrow 27 - 72 \rightarrow -45 + 54 \rightarrow 9$$

Máme-li tedy v posloupnosti dvojciferné číslo dělitelné devíti, po několika krocích dostaneme jednociferné číslo, o kterém jsme ukázali, že v posloupnosti ležet nemůže. Celkem tedy nemůže být a_1 ani dvouciferné číslo.

Uvažme, že a_1 je libovolné trojciferné číslo tvaru $100a + 10b + c$, pak $a_2 = 99(a - c)$. Uvážíme posloupnost kroků

$$900 - 9 \rightarrow 891 - 198 \rightarrow 693 - 396 \rightarrow 297 - 792 \rightarrow -495 + 594 \rightarrow 99$$

V posloupnosti se tedy nesmí nacházet ani trojciferné číslo.

Pro úplnost dodejme, že nejmenší přípustné přirozené číslo a_1 je 1012. ■

Příklad 7.8. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde číslo b_n má opačné pořadí číslic než číslo a_n (v dekadickém zápise). Dokažte, že a_7 nemůže být prvočíslo. S výhodou lze využít kritéria dělitelnosti jedenácti.

Řešení.

- Podívejme se na číslo $x = 10^k x_k + 10^{k-1} x_{k-1} + \dots + 10^1 x_1 + 10^0 x_0$ modulo 11

$$x = 10^k x_k + 10^{k-1} x_{k-1} + \dots + 10^1 x_1 + 10^0 x_0 \equiv (-1)^k x_k + (-1)^{k-1} x_{k-1} + \dots - x_1 + x_0 \pmod{11}$$

Jestliže y má opačné pořadí čísel než x , pak $x \equiv \pm y \pmod{11}$, přičemž znaménko plus nastává, právě když má x lichý počet cifer. Má-li x sudý počet cifer, pak

$$x \equiv -y \pmod{11} \Rightarrow 11 \mid x + y.$$

Což nám s výjimkou $x = 10$ dává v dalším členu posloupnosti složené číslo dělitelné jedenácti. Navíc platí, že jakmile je jeden člen posloupnosti dělitelný jedenácti, budou jedenácti dělitelné také všechny další.

- Nyní ukážeme, že pro libovolné $a_1 \in \mathbb{N}$ má nejpozději člen a_6 sudý počet cifer. Protože $a_6 > 10$, bude pak jistě a_7 složené číslo dělitelné jedenácti. Předpokládáme tedy sporem, že $a_1, \dots, a_6$ mají lichý počet cifer. Protože je posloupnost rostoucí, musí i počet cifer růst. Jistě ale součet dvou nejvýše k -ciferných čísel nemůže dát číslo $k+2$ -ciferné. Proto $a_1, \dots, a_6$ mají stejný počet cifer. Označme c_i první a d_i poslední cifru čísla a_i . Pak

$$\begin{array}{ll} c_2 \geq c_1 + d_1 & d_2 \geq c_1 + d_1 \\ c_3 \geq 2(c_1 + d_1) & d_3 \geq 2(c_1 + d_1) \\ c_4 \geq 4(c_1 + d_1) & d_4 \geq 4(c_1 + d_1) \\ c_5 \geq 8(c_1 + d_1) & d_5 \geq 8(c_1 + d_1) \\ c_6 \geq 16(c_1 + d_1) & d_6 \geq 16(c_1 + d_1) \end{array}$$

Protože je ale $(c_1 + d_1) \geq 1$, tak číslo $16(c_1 + d_1)$ nemůže být cifrou v dekadickém zápisu. Dostáváme spor. Proto má nejpozději číslo a_6 sudý počet cifer a tedy číslo a_7 nemůže být prvočíslem.

Pro úplnost doplňme, že číslo a_6 být prvočíslem může. Pro $a_1 = 10220$ vyjde číslo $a_6 = 185767$.

■

Příklad 7.9. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}$$

a navíc platí $a_{11} = 4$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 1$. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je součet

$$a_1^k + a_2^k + \dots + a_{100}^k$$

druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení.

- Nejprve ukažme, že $a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+3} = 0$.
„ $\Rightarrow$ “ Dosadíme do zadané rovnosti $a_n = 0$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{-a_{n+1}} &= \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ -a_{n+3} + a_{n+2} &= a_{n+3} + a_{n+2} \\ a_{n+3} &= 0 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ Obdobně dosadíme za $a_{n+3} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{-a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} &= \frac{a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}} \\ a_n + a_{n+1} &= -a_n + a_{n+1} \\ a_n &= 0 \end{aligned}$$

Odtud z podmínek $a_{11}, a_{22}, a_{33} \neq 0$ plyne, že žádný člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není nulový.

- Zadanou rovnost roznásobíme a zjednodušíme, čímž dostáváme

$$a_{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}a_n.$$

Totéž můžeme uvážit pro $n+1$ místo n , což dává

$$a_{n+4}a_{n+2} = a_{n+3}a_{n+1}.$$

Vynásobením obou rovností a vykrácením (nenulovým) číslem $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$ dostáváme

$$a_{n+4} = a_n.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy periodická s periodou 4. Dostáváme

$$a_1 = a_{33} = 1, \quad a_2 = a_{22} = 2, \quad a_3 = a_{11} = 4, \quad a_4 = a_3a_1/a_2 = 2,$$

a odtud

$$a_1^k + a_2^k + a_{100}^k = 25 \left(1^k + 2^k + 4^k + 2^k \right) = \left(5 \left(1 + 2^k \right) \right)^2.$$

■

***Příklad 7.10.** Na spořicí účet s úrokovou sazbou 5% za rok ukládáme na začátku každého roku po dobu deseti let 20 000 korun.

- Kolik korun bude na účtu na konci desátého roku?
- Odvod'te obecný vztah pro velikost úložky x , úrokovou sazbu i a délku spoření n (roků).

Řešení. Odvodíme nejprve obecný vztah, do kterého potom dosadíme. Označme S částku, která bude na účtu na konci. Platí

$$S = x(1+i) + x(1+i)^2 + \dots + x(1+i)^n = x(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Přitom člen $x(1+i)$ odpovídá poslední úložce (která se úročí jen poslední rok), člen $x(1+i)^n$ první úložce (která se úročí všech n let), ostatní analogicky.

Dosazením za $x = 20\,000$, $n = 10$ a $i = 0,05$ dostáváme výsledek první části úlohy:

$$S = 20\,000 \cdot 1,05 \frac{(1,05)^{10} - 1}{0,05} \approx 264\,135,74.$$

■

Příklad 7.11. Řešte rovnici

$$y(n+1) - ny(n) = (n+1)!, \quad y(1) = 5.$$

Řešení. Homogenní: $y(n+1) = ny(n) = n(n-1)y(n-1) = \dots = c \cdot n! \Rightarrow y(n) = c \cdot (n-1)!$.

Partikulární řešení ve tvaru $y_p(n) = c(n) \cdot (n-1)!$.

$$\begin{aligned} c(n+1) \cdot n! - nc(n) \cdot (n-1)! &= (n+1)! \\ n![c(n+1) - c(n)] &= (n+1)! \\ \Delta c(n) &= n+1 \\ c(n) &= \sum (n+1) = an^2 + bn \\ n+1 &= a(2n+1) + b \\ n^1: \quad 1 &= 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ n^0: \quad 1 &= a + b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(n) &= \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right) (n-1)! = \frac{1}{2}(n+1)! \\ y(n) &= \frac{1}{2}(n+1)! + c \cdot (n-1)! \\ y(1) &= \frac{1}{2} \cdot 2 + c = 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4 \\ y(n) &= \frac{1}{2}(n+1)! + 4(n-1)! \end{aligned}$$

■

Příklad 7.12. Kolik slov délky n lze sestavit z písmen A, B, C tak, aby žádné z nich neobsahovalo podслово AC nebo BC?

Řešení. Libovolné slovo můžeme prodloužit připojením A,B, připojením C jen v případě, že jde o slovo ze samých C. Slova délky jedna jsou 3. Takže

$$y(n+1) = 2y(n) + 1.$$

Homogenní: $y(n+1) = 2y(n) = 2 \cdot 2y(n-1) = \dots = 2^n y(1) = c2^n \Rightarrow y(n) = c2^{n-1}$.

Partikulární řešení ve tvaru $y_p(n) = c(n)2^{n-1}$.

$$c(n+1)2^n - 2c(n)2^{n-1} = 1$$

$$2^n[c(n+1) - c(n)] = 1$$

$$\Delta c(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$c(n) = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} - 1} = -2 \frac{1}{2^n} = -2^{1-n}$$

$$y_p(n) = -2^{1-n} \cdot 2^{n-1} = -2^0 = -1$$

$$y(n) = c2^{n-1} - 1$$

$$y(1) = c2^0 - 1 = c - 1 = 3 \Rightarrow c = 4$$

$$y(n) = 4 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^{n+1} - 1$$

■

Příklad 7.13. Řešte rovnice

a) $y(n+2) - 9y(n+1) + 18y(n) = 0;$

b) $y(n+2) - 8y(n+1) + 16y(n) = 0;$

c) $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 0.$

Řešení.

a)

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 6$$

$$y(n) = c_1 3^n + c_2 6^n$$

b)

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

$$\lambda = 4$$

$$y(n) = c_1 4^n + c_2 n 4^n$$

c)

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$y(n) = (\sqrt{2})^n \left(c_1 \cos n \frac{\pi}{4} + c_2 \sin n \frac{\pi}{4} \right)$$

■

Příklad 7.14. Určete explicitní vyjádření Fibonacciho posloupnosti.*Řešení.*

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n), \quad y(1) = y(2) = 1$$

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y(n) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$y(1) = 1: \quad c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \quad (7.1)$$

$$y(2) = 1: \quad c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \quad (7.2)$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} (7.1) - (7.2): \quad c_2 \left[\frac{1 - 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1$$

$$c_2 \left[\frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \right] = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$c_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-5 + \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 1$$

$$c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

■

Příklad 7.15. Kolik slov délky n lze sestavit z písmen A, B, C tak, aby žádné z nich neobsahovalo podslovo AA, AB, BA, BB?

Řešení. Slovo délky $n+2$ končící A nebo B můžeme vytvořit ze slov délky n připojením CA nebo CB, končící C ze slov délky $n+1$ připojením C, takže $y(n+2) = 2y(n) + y(n+1)$. Slovo délky jedna je 3, délky dva 5. Takže

$$y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = 0, \quad y(1) = 3, y(2) = 5.$$

$$y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$$

$$y(n) = c_1 2^n + c_2 (-1)^n$$

$$y(1) = 3: \quad 2c_1 - c_2 = 3$$

$$y(2) = 5: \quad 4c_1 + c_2 = 5$$

$$6c_1 = 8 \Rightarrow c_1 = \frac{4}{3}$$

$$c_2 = 2c_1 - 3 = -\frac{1}{3}$$

$$y(n) = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$$

$$y(n) = \frac{1}{3} [2^{n+2} + (-1)^{n+1}]$$

■

Příklad 7.16. Určete součet prvních n členů posloupnosti $a_n = n^2$.

Řešení.

$$s_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2, \quad s_1 = 1$$

$$s_n = \sum (n+1)^2 = \sum (n^2 + 2n + 1) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$$n^2 + 2n + 1 = a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c$$

$$n^2: \quad 1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$n^1: \quad 2 = 3a + 2b = 1 + 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$n^0: \quad 1 = a + b + c = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{6}$$

$$s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d$$

$$s_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d = 1 + d = 1 \Rightarrow d = 0$$

$$s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

■

Příklad 7.17. Určete součet prvních n členů posloupnosti $y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n n$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} (n+1) = \left| \begin{array}{ll} a_n = n+1 & \Delta b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ \Delta a_n = 1 & b_n = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \end{array} \right| = \\
 &= (n+1) \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{4} \sum \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2} = \\
 &= (n+1) \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{4} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{-\frac{1}{3}-1} + c = \\
 &= (n+1) \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{9}{16} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2} + c \\
 &= \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (4n+3)
 \end{aligned}$$

$$s_1 = -\frac{7}{48} + c = -\frac{1}{3} \Rightarrow c = -\frac{3}{16}$$

$$s_n = \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (4n+3) - \frac{3}{16}$$

■

Kapitola 8

Diofantické rovnice

8.1 Teorie

Jedná se o rovnice, u nichž hledáme pouze celočíselná řešení. Dá se dokázat, že neexistuje (a ani existovat nemůže) žádný univerzální postup řešení. Existují však různé metody, které nám v řadě konkrétních případů pomohou řešení nalézt.

8.1.1 Lineární diofantické rovnice

V této části se budeme zabývat speciální třídou diofantických rovnic, pro kterou univerzální postup řešení existuje.

Definice 8.1. Diofantickou rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

pro neznámé $x_1, \dots, x_n$ a daná čísla $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, nazveme *lineární diofantickou rovnicí*.

Věta 8.2. *Diofantická rovnice o n proměnných, kde $(a_1, \dots, a_n) = 1$, má vždy řešení v $\mathbb{Z}$ a všechna řešení je možné popsat pomocí $n - 1$ celočíselných parametrů.*

Místo důkazu této věty si celý postup předvedeme na konkrétním příkladu.

Rozmysleme však ještě, co se stane, když nebude splněna podmínka $(a_1, \dots, a_n) = 1$. V takovém případě je levá strana rovnice dělitelná $(a_1, \dots, a_n)$. Pokud je tímto číslem dělitelná i pravá strana, tj. číslo b , pak můžeme krátit a po vykrácení již podmínka pro nové koeficienty splněna bude. V opačném případě řešení existovat nebude.

Příklad. Řešte v $\mathbb{Z}$

$$18x + 20y + 15z = 1$$

Řešení. Nejprve si zvolíme jednu proměnnou a spočítáme největšího společného dělitele koeficientů všech ostatních. Na diofantickou rovnici se pak podíváme modulo toto číslo. V našem případě zvolme jako tuto proměnnou například x . Pak $(20, 15) = 5$. Když se podíváme na rovnici modulo 5, dostáváme

$$18x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$3x \equiv 6 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$x = 2 + 5t$$

Dosadíme do zadané rovnice a vykrátíme

$$20y + 15z = 1 - 18 \cdot 2 - 18 \cdot 5t$$

$$4y + 3z = -7 - 18t$$

Nyní celý postup opakujeme. Vybereme proměnnou y , pak největší společný dělitel koeficientů u zbývajících proměnných je 3. Dostáváme

$$y \equiv -1 \pmod{3}$$

$$y = -1 + 3s$$

Dosadíme a vykrátíme

$$3z = -3 - 18t - 12s$$

$$z = -1 - 6t - 4s$$

Řešením jsou trojice

$$(x, y, z) \in \{(2 + 5t, -1 + 3s, -1 - 6t - 4s) \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$$

■

8.2 Příklady

Příklad 8.1. Je možné na dvouramenných vahách (ramena stejné délky) odvážit 1 g nějakého zboží, máme-li k dispozici pouze (libovolný počet) závaží tří hmotností: 153 g, 135 g a 425 g? Pokud ano, jak to udělat? Vhodným způsobem запиšte všechna možná řešení a některé z řešení explicitně vyčíslete.

Řešení. Sestavme diofantickou rovnici

$$153x + 135y + 425z = 1$$

přičemž kladný počet závaží pokládáme na jedno rameno, záporný počet na druhé, kde je zboží. Jde o lineární diofantickou rovnici a $(153, 135) = 9$.

$$425z \equiv 1 \pmod{9}$$

$$2z \equiv 10 \pmod{9}$$

$$z \equiv 5 \pmod{9}$$

$$z = 5 + 9t$$

$$153x + 135y + 425(5 + 9t) = 1$$

$$153x + 135y = -2124 - 3825t$$

$$17x + 15y = -236 - 425t$$

$$15y \equiv -236 - 425t \pmod{17}$$

$$-2y \equiv 2 \pmod{17}$$

$$y \equiv -1 \pmod{17}$$

$$y = -1 + 17k$$

$$17x + 15(-1 + 17k) = -236 - 425t$$

$$17x = -221 - 255k - 425t$$

$$x = -13 - 15k - 25t$$

Množina řešení je tvaru

$$K = \{[-13 - 15k - 25t; -1 + 17k; 5 + 9t], k, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Možný počet závaží je tedy např. pro $k, t = 0$: $x = -13$, $y = -1$, $z = 5$. Na jedné straně je tedy pět 425g závaží, na druhé straně se zbořím třináct 153g a jedno 135g závaží. ■

Příklad 8.2. Řešte diofantickou rovnici

$$7x^2 + 5y + 13 = 0$$

Řešení. Rovnice je lineární v proměnné y . Podívejme se na ni modulo 5.

$$7x^2 + 13 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$2x^2 \equiv -3 \pmod{5}$$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x = \pm 1 + 5t$$

Dosadíme

$$7(\pm 1 + 5t)^2 + 5y + 13 = 5y + 20 \pm 70t + 175t^2$$

Můžeme vyjádřit y a dostaneme řešení ve tvaru

$$[x, y] = [1 + 5t, -35t^2 - 14t - 4] \quad \text{nebo} \quad [x, y] = [-1 + 5t, -35t^2 + 14t - 4].$$

■

Příklad 8.3. Řešte diofantickou rovnici

$$x^2 + 4z^2 + 6x + 7y + 8z = 1$$

Řešení. Všimněme si, že rovnice je lineární v proměnné y . Podívejme se na ni modulo 7.

$$x^2 + 6x + 4z^2 + 8z \equiv 1 \pmod{7}$$

$$(x + 3)^2 + 4(z + 1)^2 \equiv 0 \pmod{7}$$

Podívejme se na kvadratické zbytky modulo 7.

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Snadno ověříme, že řešení dostáváme jen pro $x + 3 \equiv z + 1 \equiv 0 \pmod{7}$. Odtud

$$x = -3 + 7t \quad z = -1 + 7s$$

a dosadíme do původní rovnice, abychom získali y .

$$7y = -(x + 3)^2 - 4(z + 1)^2 + 14 = -49t^2 - 196s^2 + 14$$

$$y = -7t^2 - 28s^2 + 2$$

■

Příklad 8.4. Řešte diofantickou rovnici

$$2x^2 + xy = y^2 + 63.$$

Řešení. Řešíme rozkladem

$$2x^2 + xy = y^2 + 63$$

$$2x^2 + xy - y^2 = 63$$

$$(2x - y)(x + y) = 63 = 3^2 \cdot 7$$

Dělitelé 63 jsou $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 21, \pm 63$.

Projdeme postupně všechny možnosti

$$2x - y = 63 \quad (-63)$$

$$x + y = 1 \quad (-1)$$

$$3x = 64 \quad (-64)$$

$$3 \nmid 64 \quad \text{NŘ}$$

$$2x - y = 21 \quad (-21)$$

$$x + y = 3 \quad (-3)$$

$$3x = 24 \quad (-24)$$

$$x = 8 \quad (-8)$$

$$y = -5 \quad (5)$$

$$2x - y = 9 \quad (-9)$$

$$x + y = 7 \quad (-7)$$

$$3x = 16 \quad (-16)$$

$$3 \nmid 16 \quad \text{NŘ}$$

$$2x - y = 1 \quad (-1)$$

$$x + y = 63 \quad (-63)$$

$$3x = 64 \quad (-64)$$

$$3 \nmid 64 \quad \text{NŘ}$$

$$2x - y = 3 \quad (-3)$$

$$x + y = 21 \quad (-21)$$

$$3x = 24 \quad (-24)$$

$$x = 8 \quad (-8)$$

$$y = 13 \quad (-13)$$

$$2x - y = 7 \quad (-7)$$

$$x + y = 9 \quad (-9)$$

$$3x = 16 \quad (-16)$$

$$3 \nmid 16 \quad \text{NŘ}$$

$$K = \{[8, -5], [8, 13], [-8, 5], [-8, -13]\}.$$



Příklad 8.5. Řešte diofantickou rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde p je libovolné prvočíslo.

Řešení. Nejprve vynásobíme celou rovnici xyp a dostáváme

$$\begin{aligned} xy - px - py &= 0 \\ xy - px - py + p^2 &= p^2 \\ (x-p)(y-p) &= p^2 \end{aligned}$$

Dostáváme 6 možností, které musíme rozebrat (první závorka může být $\pm 1, \pm p, \pm p^2$)

- $x-p=1$, pak $y-p=p^2$ a dostáváme řešení $[p+1, p^2+p]$
- $x-p=p$, pak $y-p=p$ a dostáváme řešení $[2p, 2p]$
- $x-p=p^2$, pak $y-p=1$ a dostáváme řešení $[p^2+p, p+1]$
- $x-p=-1$, pak $y-p=-p^2$ a dostáváme řešení $[p-1, p-p^2]$
- $x-p=-p$, pak $y-p=-p$ a dostáváme $x=y=0$, což nevyhovuje zadání
- $x-p=-p^2$, pak $y-p=-1$ a dostáváme řešení $[p-p^2, p-1]$

Úloha má tedy právě pět řešení. ■

Příklad 8.6. Řešte diofantickou rovnici

$$3^x = 4y + 5.$$

Řešení. Rovnice je lineární v proměnné y . Podívejme se na ni modulo 4.

$$(-1)^x \equiv 1 \pmod{4}$$

Odtud zřejmě $x = 2k$. Dosadíme do původní rovnice a vyjádříme y

$$y = \frac{9^k - 5}{4}.$$

Příklad 8.7. Řešte diofantickou rovnici

$$x(y+1)^2 = 243y.$$

Řešení. Z rovnice vyjádříme x

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

Protože $(y, y+1) = 1$, musí $(y+1)^2 \mid 243 = 3^5$, tj. $(y+1) \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Dopočítáme příslušná x :

y	0	-2	2	-4	8	-10
x	0	-486	54	-108	24	-30

Máme tedy 6 řešení. ■

Příklad 8.8. Řešte v oboru přirozených čísel

$$x + y + z = xyz$$

Řešení. Rovnice je symetrická v proměnných x, y, z . Předpokládejme proto, že $x \leq y \leq z$, pak

$$xyz = x + y + z \leq 3z$$

$$xy \leq 3$$

Nutně $x = 1$ a $y \in \{1, 2, 3\}$. Tyto případy dořešíme

- $x = y = 1$, pak $z = z + 2$, což je spor s celočíselností z
- $2x = y = 2$, pak $2z = z + 3$, tedy $z = 3$.
- $3x = y = 3$, pak $3z = z + 4$, tedy $z = 2$, což je spor s $y \leq z$.

Dostáváme tedy šest řešení. $(1, 2, 3)$ a všechny permutace. ■

Příklad 8.9. Řešte diofantickou rovnici

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

Řešení. Rovnice je symetrická v proměnných x, y . Předpokládejme proto, že $x \leq y$, pak

$$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leq 3y^2$$

$$x^2 \leq 3$$

Máme tedy tři možnosti pro x

- $x = 0$, pak $y = 0$
- $x = 1$, pak $y = -1$, což je spor s předpokladem $x \leq y$
- $x = -1$, pak $y = 1$

Dostáváme tři řešení (díky symetrii se nám vrátí vyloučené řešení).

$$K = \{[0, 0], [-1, 1], [1, -1]\}.$$
 ■

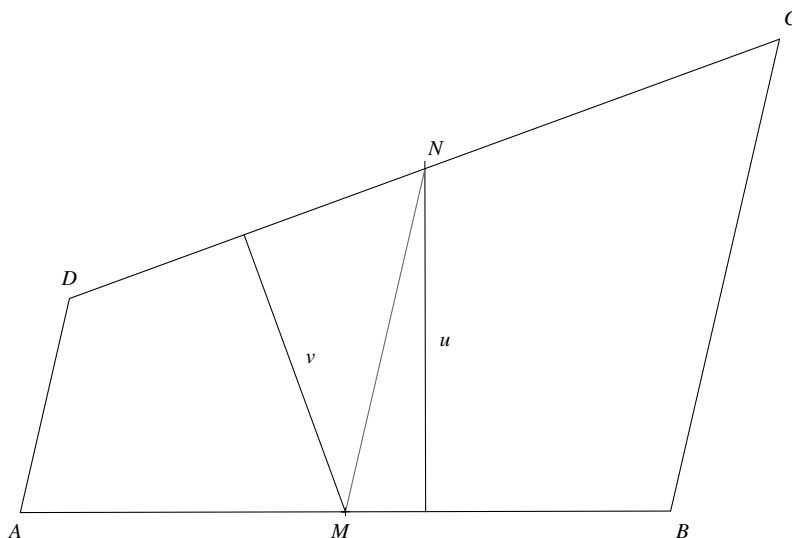
Kapitola 9

Geometrie III

9.1 Příklady

Příklad 9.1. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strana CD se dotýká Thaletovy kružnice nad AB . Dokažte, že AB se dotýká Thaletovy kružnice nad CD , právě když AD a BC jsou rovnoběžné.

Řešení. Označme M a N středy stran AB a CD . Dále označme v vzdálenost bodu M od CD a u vzdálenost bodu N od AB . Podle předpokladu $v = |AM| = |BM|$.



Platí:

$$AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel MN \Leftrightarrow S_{\triangle DMN} = S_{\triangle AMN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|DN|v = \frac{1}{2}|AM|u \Leftrightarrow |DN| = u.$$

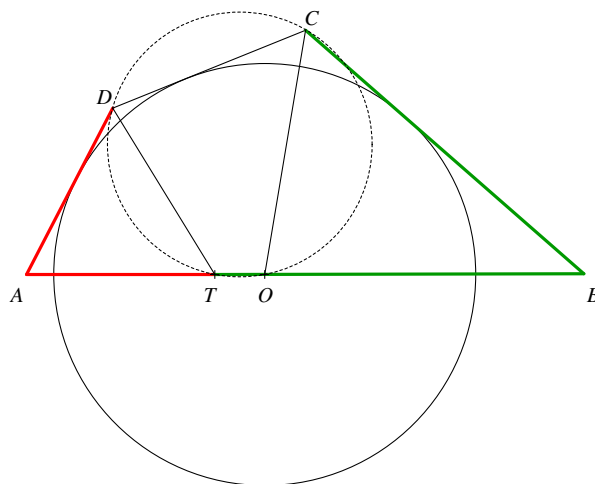
Analogicky

$$BC \parallel MN \Leftrightarrow S_{\triangle BMN} = S_{\triangle CMN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|BM|u = \frac{1}{2}|CN|v \Leftrightarrow |CN| = u,$$

tedy $|DN| = |CN| = u \Rightarrow AD \parallel BC$. ■

Příklad 9.2. Je dán tětívový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnice se středem O ležícím na AB , která se dotýká zbylých stran (BC, CD, AD). Dokažte, že $|AB| = |AD| + |CB|$.

Řešení. Označme T bod ležící na straně AB s vlastností $|AT| = |AD|$.



Pak platí

$$|\angle DTA| = \frac{180^\circ - |\angle DAT|}{2} = \frac{|\angle DCB|}{2} = |\angle DCO|.$$

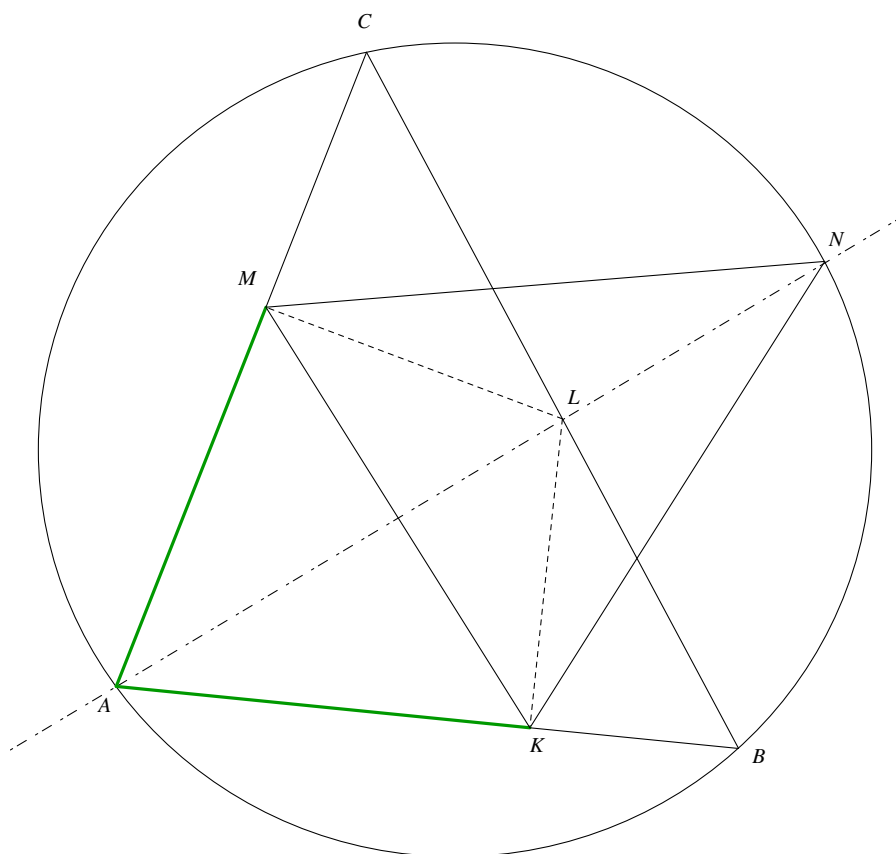
Z toho plyne, že čtyřúhelník $DCOT$ je tětívový, a proto $|\angle CTB| = |\angle CDO| = \beta$. Platí

$$|\angle TCB| = 180^\circ - (|\angle CBT| + |\angle CTB|) = 180^\circ - ((180^\circ - 2\beta) + \beta) = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta.$$

To znamená, že trojúhelník CTB je rovnoramenný, a tedy $|BT| = |CB|$. Tím je důkaz hotov. ■

Příklad 9.3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Osa úhlu při vrcholu A protíná stranu BC v bodě L a kružnici opsanou ABC protíná v bodě $N \neq A$. Označme K , resp. M patu výšky z bodu L na stranu AB , resp. AC . Dokažte, že obsah trojúhelníku ABC je stejný jako obsah čtyřúhelníku $AKNM$.

Řešení. Označme α úhel při vrcholu A .



Zřejmě $KM \perp AN$, neboť AN je osou úhlu v rovnoramenném trojúhelníku KMN . Trojúhelníky ABN a ALC jsou podobné, protože mají shodné úhly. To nám dává

$$\frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AL|}.$$

Platí

$$\frac{|KM|}{2} = |AM| \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = |AL| \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|AL| \cdot \sin \alpha}{2}.$$

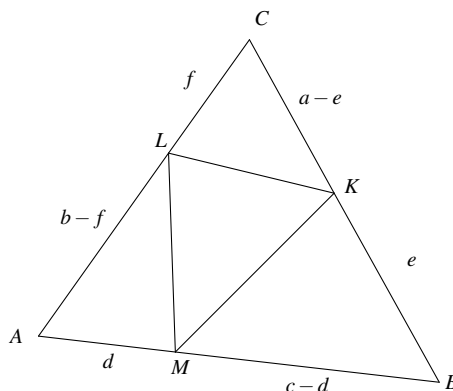
Odtud pak

$$S_{AKNM} = \frac{1}{2} |AN| \cdot |KM| = \frac{1}{2} \frac{|AB| |AC| |KM|}{|AL|} = \frac{1}{2} |AB| |AC| \sin \alpha = S_{ABC}.$$

■

Příklad 9.4. Je dán trojúhelník ABC a na každé jeho straně je zvolen jeden vnitřní bod. Na straně AB bod M , na straně BC bod K a na straně AC bod L . Dokažte, že obsah alespoň jednoho z trojúhelníků AML , BMK , CLK nepřevýší čtvrtinu obsahu trojúhelníka ABC .

Řešení. Označme $d = |AM|$, $e = |BK|$, $f = |CL|$.



Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že všechny tři trojúhelníky mají obsah větší než čtvrtina obsahu trojúhelníka ABC . Po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} d(b-f) &> \frac{bc}{4} \\ e(c-d) &> \frac{ca}{4} \\ f(a-e) &> \frac{ab}{4}. \end{aligned}$$

Dohromady

$$def(a-e)(b-e)(c-d) > \frac{a^2b^2c^2}{64}.$$

Současně platí (AG-nerovnost)

$$\begin{aligned} f(b-f) &\leq \frac{b^2}{4} \\ d(c-d) &\leq \frac{c^2}{4} \\ e(a-e) &\leq \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

a tedy

$$def(a-e)(b-e)(c-d) \leq \frac{a^2b^2c^2}{64},$$

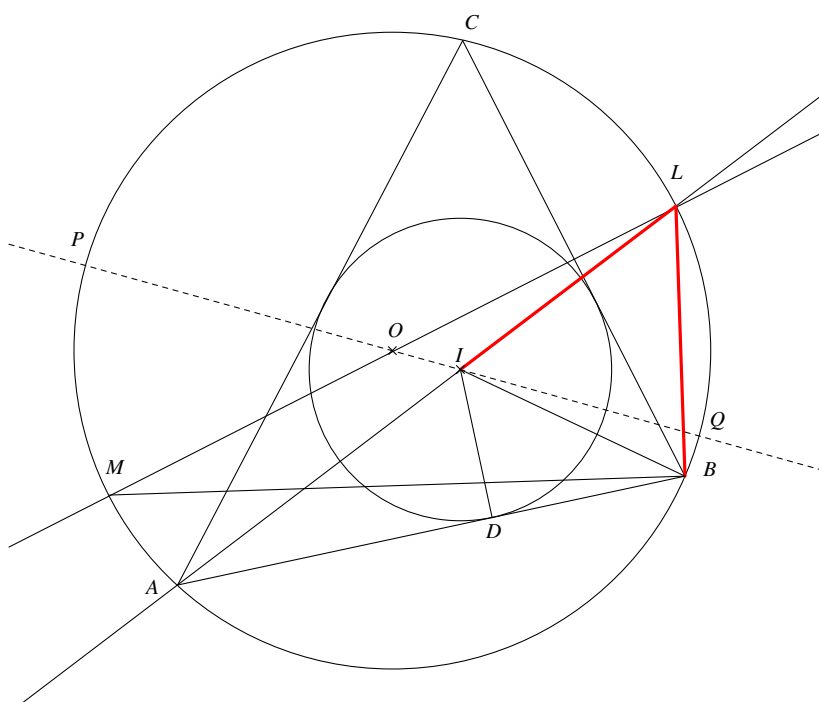
což je spor. ■

Příklad 9.5. Je dán trojúhelník ABC . Označme O střed kružnice opsané a r její poloměr, I střed kružnice vepsané a ρ její poloměr. Dokažte, že platí

$$|OI| = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

Řešení. Pokud $O = I$ tvrzení zřejmě platí (trojúhelník je rovnostranný). Dále tedy budeme předpokládat, že $I \neq O$.

Označme L bod, ve kterém přímka AI protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC . Přímka LO protne kružnici opsanou v bodě M . Dále označme D patu výšky z bodu I na stranu AB .



Trojúhelníky ADI a MBL jsou podobné, a proto platí

$$|ID| \cdot |ML| = 2r\rho = |AI| \cdot |BL|.$$

Dále platí, že $|\angle LAB| = |\angle LAC| = |\angle CBL|$, a proto $|\angle BIL| = |\angle IBL|$, tedy trojúhelník IBL je rovnostranný.

Přímka IO (tedy předpokládáme, že $I \neq O$) protne kružnici opsanou v bodech P a Q . Podle předchozího platí

$$2r\rho = |AI||BL| = |AI||IL| = |PI||QI| = (|PO| + |IO|)(|QO| - |IO|) = (r + d)(r - d).$$

Odtud dostaneme

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

■

Příklad 9.6. Je dán trojúhelník ABC . Dokažte, že platí

$$\sin \alpha \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

právě když na straně AB existuje bod D takový, že $|CD|$ je geometrickým průměrem $|DA|$ a $|DB|$.

Řešení. Buď X libovolný vnitřní bod strany AB . Pak existuje $\varepsilon \in [0, \frac{\gamma}{2})$ takové, že

$$\frac{|XC|^2}{|XA||XB|} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\frac{\gamma}{2} + \varepsilon) \sin(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \varepsilon}.$$

Předpokládejme, že $\sin \beta \sin \alpha \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$. Pokud nastane rovnost, pak hledaným bodem je průsečík AB s osou úhlu γ . Můžeme tedy předpokládat, že $0 < \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin \beta \sin \alpha \leq 1$. Položme

$$\varepsilon := \arcsin \left(\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin \beta \sin \alpha} \right).$$

Zřejmě $\varepsilon \in (0, \frac{\gamma}{2})$; v opačném případě bychom dostali $\sin^2 \frac{\gamma}{2} < \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin \alpha \sin \beta$, což není možné. Tomuto ε odpovídají body D_1, D_2 s vlastností

$$\frac{|D_1C|^2}{|D_1A||D_1B|} = \frac{|D_2C|^2}{|D_2A||D_2B|} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \varepsilon} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - (\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin \alpha \sin \beta)} = 1.$$

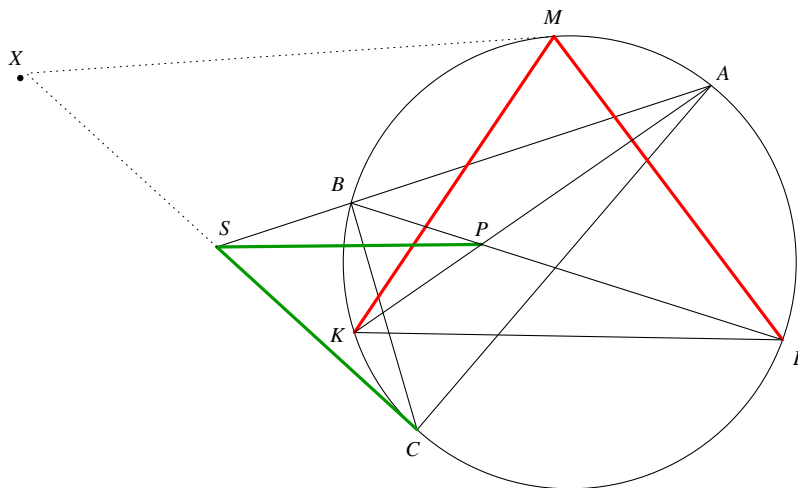
Nyní předpokládejme, že $\sin \beta \sin \alpha > \sin^2 \frac{\gamma}{2}$. Pak pro každý vnitřní bod X strany AB platí

$$\frac{|XC|^2}{|XA||XB|} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \varepsilon} > \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} > 1.$$

■

Příklad 9.7 (IMO 2010 - příklad 4). Necht' bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC . Přímky AP , BP a CP protínají kružnici k opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K , L a M (různých od A , B , C). Tečna ke kružnici k v bodě C protíná přímku AB v bodě S . Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML .

Řešení. Předpokládejme, že platí $|SC| = |SP|$. Tečna ke kružnici k v bodě M protíná přímku AC v bodě X . Trojúhelníky XMC a SPC jsou podobné, a proto $SP \parallel XM$.



Nyní uvažme mocnost bodu S ke kružnici k . Platí

$$|SP|^2 = |SC|^2 = |SB| \cdot |SA|.$$

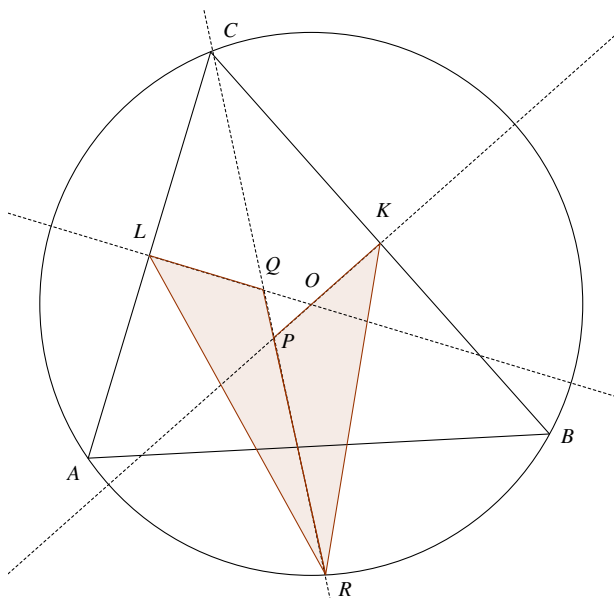
Odtud dostaneme, že trojúhelníky SBP a SPA jsou podobné. Stejně tak trojúhelníky BPA a KPL jsou podobné. Zejména platí $|\angle SPB| = |\angle KLP|$, a tedy $SP \parallel KL$. Odtud dostaneme $KL \parallel XM$, a tedy $|MK| = |ML|$. ■

Příklad 9.8. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protíná jeho opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C , osu strany BC v bodě P a osu strany AC v bodě Q . Střed strany BC označme K a střed strany AC označme L . Dokažte, že obsahy trojúhelníků RPK a RQL se rovnají.

Řešení. Pro obsahy trojúhelníků RQL a PRK platí

$$S_{RQL} = \frac{1}{2} |LQ| \cdot |RQ| \sin(\angle RQL),$$

$$S_{PRK} = \frac{1}{2} |PR| \cdot |PK| \sin(\angle KPR).$$



Dále víme, že

$$|\angle CPK| = |\angle CQL| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

$$|\angle KPR| = |\angle LQR| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{|PK|}{|QL|} = \frac{|CK|}{|CL|} = \frac{|CB|}{|AC|}.$$

Dohromady máme

$$\frac{S_{RQL}}{S_{PRK}} = \frac{|LQ|}{|PK|} \cdot \frac{|RQ|}{|PR|} = \frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|RQ|}{|PR|}.$$

Chceme ukázat, že

$$\frac{|RQ|}{|PR|} = \frac{|CB|}{|AC|}.$$

Platí $|\angle ROK| = \alpha + \gamma$ (platí $RO \perp AB$) a $|\angle ROP| = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = \beta$. Aplikací sinové věty pro trojúhelník RPO dostaneme

$$\frac{|RP|}{\sin \beta} = \frac{|OR|}{\sin(90^\circ + \frac{\gamma}{2})}$$

$$|RP| \cdot \sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = |OR| \cdot \sin \beta,$$

Odtud plyne, že $2|RP|\cos\frac{\gamma}{2} = |AC|$. Analogicky pro trojúhelník ROQ dostaneme

$$|RQ| \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = |OR| \cdot \sin\alpha = |OB| \cdot \sin(\angle KOB) = \frac{1}{2}|BC|.$$

Odtud $2|RQ|\cos\frac{\gamma}{2} = |BC|$. Dohromady máme

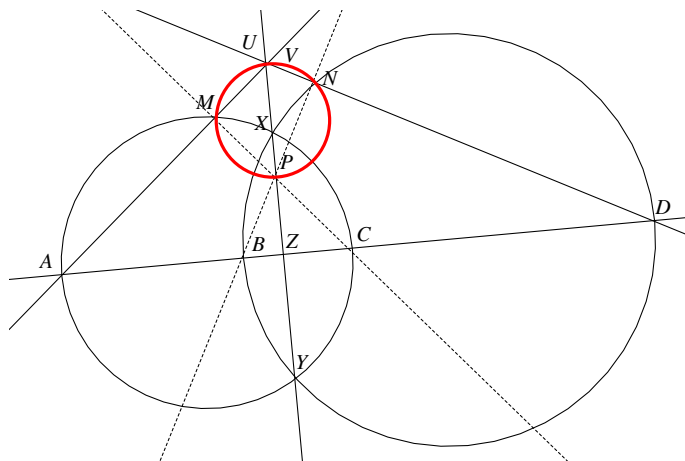
$$\frac{|RQ|}{|PR|} = \frac{|CB|}{|AC|},$$

což jsme chtěli ukázat. ■

Příklad 9.9. Na přímce jsou dány body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice s průměrem AC protíná kružnici s průměrem BD v bodech X a Y . Úsečka XY protne BC v bodě Z . Bud' P libovolný bod přímky XY různý od Z . Přímka CP protíná kružnici k a M a přímka BP protíná kružnici l v bodech B a N . Dokažte, že přímky AM, DN a XY jsou konkurentní (tj. protínají se v jednom bodě).

Řešení. Pokud $P = X$ nebo $P = Y$, pak $M = N = P$ a tvrzení platí triviálně. Dále tedy budeme předpokládat, že $P \neq X, P \neq Y$.

Označme U průsečík přímek XY a AM a V průsečík přímek XY a DN . Ukážeme, že $U = V$.



Mocnost bodu P dává

$$|PM| \cdot |PC| = |PX| \cdot |PY| = |PN| \cdot |PB|,$$

tedy

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|PB|}{|PC|}.$$

To znamená, že $|\angle PNM| = |\angle MCB| = |\angle MUP|$, a tedy body M, N, P, U leží na společné kružnici. Podobně dostaneme, že $|\angle PMN| = |\angle NBC| = |\angle NVP|$, což znamená, že body M, N, P, V leží na společné kružnici. Tato kružnice je protnuta přímkou XY ve dvou bodech, přičemž jeden z nich je bod P . Vzhledem k tomu, že $U \neq P \neq V$, musí platit, že $U = V$. ■

Příklad 9.10. Necht' P je vnitřní bod trojúhelníka ABC . Označme D, E, F paty výšek z bodu P na strany BC, AC, AB . Nalezněte všechny body P , pro které

$$\frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|AC|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|}$$

nabývá nejmenší hodnoty.

Řešení. Zřejmě je $|PD| \cdot |BC| + |AC| \cdot |PE| + |AB| \cdot |PF|$ dvojnásobek obsahu trojúhelníka, tedy je to konstanta nezávislé na P . Aplikací Cauchy-Swarzovy nerovnosti dostaneme

$$\left(\frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|AC|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|} \right) \cdot (|PD| \cdot |BC| + |AC| \cdot |PE| + |AB| \cdot |PF|) \geq (|BC| + |AC| + |AB|)^2,$$

tedy

$$(|PD| \cdot |BC| + |AC| \cdot |PE| + |AB| \cdot |PF|) \geq \frac{(|BC| + |AC| + |AB|)^2}{2S_{ABC}},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $|PD| = |PE| = |PF|$, tj. hledaným bodem je střed kružnice vepsané. ■

Kapitola 10

Závěrečné opakování

Příklad 10.1. Dokažte, že pro libovolné celé číslo n , 121 nedělí $n^2 + 3n + 5$.

Řešení. Pokud 121 dělí nějaké celé číslo, musí toto číslo dělit i 11. Protože $n^2 + 3n + 5 \equiv n^2 - 8n + 16 = (n - 4)^2 \pmod{11}$, je podmínka $11 \mid n^2 + 3n + 5$ ekvivalenční s $(n - 4)^2 \equiv 0 \pmod{11}$. Jelikož je 11 prvočíslo, musí být $n \equiv 4 \pmod{11}$, neboli $n = 11k + 4$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Dosazením $n^2 + 3n + 5 = (11k + 4)^2 + 3(11k + 4) + 5 = 121(k^2 + k) + 33$. Odtud již vidíme, že 121 takové číslo nikdy nedělí. ■

Příklad 10.2. Tabulka 10.1 je výchozí situace. V jednom kroku můžete změnit znaménka v jednom řádku, sloupci, či rovnoběžce s diagonálou (zejména také můžete změnit znaménka ve všech rozích). Dokažte, že vždy bude v tabulce alespoň jedna -1 .

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Tabulka 10.1: Výchozí situace.

Řešení. Invariantem je zde součin osmi čísel na krajních pozicích vyjma rohových. Ten je na počátku, a tedy i nadále, -1 , proto je na nich vždy alespoň jedna -1 . ■

Příklad 10.3. Necht' $a, b, c > 0$. Dokažte, že nerovnice

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

nemohou být splněny současně.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že všechny tři nerovnosti platí. Pak nutně $a, b, c < 1$. Všechny nerovnosti vynásobíme a dostáváme

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64}.$$

Stačí uvážit

$$a(1-a) = -(a^2 - a) = -(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Součin všech tří členů pak bude nejvýše $\frac{1}{64}$, což je spor. ■

Příklad 10.4. Na začátku mějme číslo 7^{2015} . V jednom kroku odebereme první cifru a přičteme ji ke zbylému číslu. Takto postupujeme, dokud nám nezůstane deseticiferné číslo. Dokažte, že toto číslo má dvě stejné cifry.

Řešení. Z pravidla pro dělitelnost devíti víme, že ciferný součet modulo devět je vůči této operaci invariantní. Pokud by výsledné číslo mělo skládat z deseti různých cifer, byl by jeho ciferný součet $0 + 1 + \dots + 9 = 45$. Protože $9 \mid 45$, musela by $9 \mid 7^{2015}$, což ale zjevně neplatí. Proto takového stavu nemůžeme dosáhnout, a nějaká cifra zde musí být dvakrát. ■

Příklad 10.5. Konečná množina bodů v rovině má následující vlastnost: kdykoli vedeme jejími libovolnými dvěma body přímkou, leží na této přímce alespoň jeden další bod této množiny. Dokažte, že všechny body této množiny leží na jedné přímce.

Řešení. Označme S zadanou množinu. Tvrzení dokážeme sporem. Existuje tedy přímka vedená dvěma body z S a bod x , který na ní neleží. Protože je množina S konečná, je takovýchto dvojic (přímka, bod) jen konečný počet. Vyberme tedy takovou dvojici (p, x) , kde bod x má nejmenší možnou (kladnou) vzdálenost od přímky p . Označme x_0 patu kolmice z bodu x na přímku p . Protože na přímce leží vždy alespoň 3 body množiny S , musí dva z nich, označme je a, b ležet na stejné straně od x_0 (je-li x_0 jedním z těchto tří bodů, uvažujeme, že $b = x_0$ a a je libovolný ze zbývajících bodů). Předpokládejme, že b je ten bod blíže x_0 . Když body a, x vedeme přímku, je vzdálenost b od této přímky menší, než byla vzdálenost x od p . Dostáváme spor s volbou dvojice (p, x) - brali jsme tu dvojici, kde vzdálenost byla minimální. ■

Příklad 10.6. Bud' te $x, y, z \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Dokažte, že

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Řešení. Sporem předpokládejme, že $x^2 + y^2 + z^2 < \frac{3}{4}$. Pak

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} < \frac{1}{2},$$

a odtud s použitím GQ nerovnosti pro x, y, z (respektive AG nerovnosti pro x^2, y^2, z^2) dostáváme

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} < \frac{1}{2}$$

a tedy $xyz < \frac{1}{8}$. Odtud dostáváme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

což je spor. Rovnost nastane pro $|x| = |y| = |z| = \frac{1}{2}$, kdy právě sudý počet proměnných je záporný. ■

Příklad 10.7. Řešte diofantickou rovnici $19x^3 - 84y^3 = 1984$.

Řešení. Přepišme tuto rovnici do tvaru $19(x^3 - 100) = 84(y^3 + 1)$. Protože $7 \mid 84$, dělí 7 celou pravou stranu této rovnice, musí tedy dělit i levou. Jelikož jsou čísla 7 a 19 nesoudělná, musí 7 dělit $x^3 - 100$. Kongruencemi $x^3 - 100 \equiv x^3 - 2 \equiv 0 \pmod{7}$, neboli $x^3 \equiv 2 \pmod{7}$. Udělejme si tabulku možných zbytků třetích mocnin modulo 7.

$x \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$x^3 \pmod{7}$	0	1	1	6	1	6	6

Z této tabulky vidíme, že $x \not\equiv 2 \pmod{7}$, proto tato rovnice nemá řešení. ■

Příklad 10.8. Uvažujme konečnou množinu měst. Předpokládejte, že mezi každými dvěma městy je právě jedna cesta a že každá cesta je jednosměrná. Dokažte, že existuje město, do kterého se dá z každého jiného dostat přímo nebo přes nejvýše jedno další město.

Řešení. Označme m nejvyšší počet cest směřujících do libovolného města. Označme M město, které tohoto maxima nabývá. Označme P množinu m měst, z nichž vede cesta do M přímo, Z všechna ostatní s výjimkou M . Jestliže je $R = \emptyset$, pak se dostaneme ze všech měst do M přímo a tvrzení platí. V opačném případě takové město existuje. Bud' tedy $X \in R$ libovolné. Z X vede cesta do některého města $z P$ (kdyby nevedla, měli bychom cestu z každého města $z P \cup \{M\}$ do X , což je spor s volbou města M), což jsme ale chtěli dokázat. ■

Příklad 10.9. Je možné převést polynom $f(x) = x^2 + 4x + 3$ na $g(x) = x^2 + 10x + 9$ pouze transformacemi

$$f(x) \mapsto x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right) \quad \text{a} \quad f(x) \mapsto (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)?$$

Řešení. Uvažme obecný kvadratický polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ s diskriminantem $D = b^2 - 4ac$. První transformace ho převede na polynom

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 \left[a \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^2 + b \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + c \right] = x^2 \left[a \left(\frac{1+2x+x^2}{x^2} \right) + b \left(\frac{1+x}{x} \right) + c \right] = \\ &= a(1+2x+x^2) + b(x+x^2) + c = (a+b+c)x^2 + (b+2a)x + a \end{aligned}$$

s diskriminantem $D_1 = (b+2a)^2 - 4(a+b+c)a = b^2 - 4ac$, a druhá na

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (x-1)^2 \left[a \left(\frac{1}{x-1} \right)^2 + b \left(\frac{1}{x-1} \right) + c \right] = a + b(x-1) + c(x-1)^2 = \\ &= a + b(x-1) + c(x^2 - 2x + 1) = cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c) \end{aligned}$$

s diskriminantem $D_2 = (b-2c)^2 - 4c(a-b+c) = b^2 - 4ac$. Tedy diskriminant je vůči těmto transformacím invariantní. Ale $x^2 + 4x + 3$ má diskriminant 4, zatímco $x^2 + 10x + 9$ má diskriminant 64. Proto je převést nelze. ■

Příklad 10.10. Bud' te $a, b, c > 0$ taková, že $abc = 1$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

a určete, kdy nastane rovnost.

Řešení. Označme $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ a $z = \frac{1}{c}$. Pak $xyz = 1$ a

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y},$$

vždyť $\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{x^3}{\frac{z+y}{yz}} = \frac{x^3 yz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}$. Označme pravou stranu jako S . Chceme ukázat, že $S \geq \frac{3}{2}$. Aplikujme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost na vektory

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}} \right) \quad \text{a} \quad (\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}),$$

odkud dostaneme

$$(x+y+z)^2 \leq S \cdot 2(x+y+z),$$

tedy $S \geq \frac{x+y+z}{2}$. Z AG nerovnosti dále dostáváme

$$S \geq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{3}{2} \geq \sqrt[3]{xyz} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rovnost nastává, když $x = y = z = 1$. ■

Příklad 10.11. Kolika nulami končí číslo $1000!$?

Řešení. Je zřejmé, že počet dvojek v prvočíselném rozkladu čísla $1000!$ je větší, než počet pětek. Tedy počet nul na konci čísla $1000!$ je dán právě počtem pětek. Mezi čísly $1, 2, \dots, 1000$ je právě 200 čísel dělitelných 5, 40 čísel dělitelných 25, 8 čísel dělitelných 125 a jedno číslo dělitelné 625. Počet pětek v prvočíselném rozkladu čísla $1000!$, a tedy i počet nul na jeho konci je proto $200 + 40 + 8 + 1 = 249$. ■

Příklad 10.12. Dokažte, že funkce $f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ daná předpisem

$$f(i, j) = \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1) + i$$

je bijektivní.

Řešení. Existuje jediná dvojice $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ taková, že součet $i + j = 0$, dvě dvojice takové, že $i + j = 1$, tři dvojice takové, že $i + j = 2$. Obecně: existuje právě k dvojic takových, že součet komponent je $k - 1$ (i probíhá čísla od 0 do $k - 1$, j se jednoznačně dopočítá). To znamená že existuje přesně $1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ dvojic takových, jejichž součet komponent není větší, než $k - 1$.

Uvažme libovolnou dvojici $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ takovou, že $i + j = k$. Pak $(i, j) \mapsto \frac{1}{2}k(k+1) + i$, tedy všechny dvojice se součtem komponent k se postupně zobrazí na čísla

$$\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} + 1, \dots, \frac{k(k+1)}{2} + k = \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

Proto se čísla s různou hodnotou $i + j$ nemohou zobrazit na stejné číslo. Zjevně se ale také čísla s fixní hodnotou $i + j$ a různou hodnotou i zobrazí na různá čísla ve výše uvedeném rozsahu. Funkce f je tedy prostá. Je také vidět, že f je surjektivní, protože předchozím způsobem jsme postupně (formálně indukcí vzhledem k $i + j$) pokryli všechna čísla z $\mathbb{N}_0$. Stačí si totiž uvědomit, že dvojic se součtem komponent nejvýše k je právě $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ a že taková čísla se jednoznačně zobrazí na $0, 1, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1$, kterých je právě $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. ■

Příklad 10.13. Připomeňme, že pro každé reálné číslo x a pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje racionální číslo r takové, že $r \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Zapsáno pomocí kvantifikátorů

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{Q}: r \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Víme také, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

A nakonec připomeňme, že množina všech racionálních čísel je *spočetná*, tj. existuje bijektivní funkce mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. Můžeme proto racionální čísla očíslovat čísly přirozenými, tedy je nějak seřadit.

Nalezněte chybu v následujícím „důkazu“, který tvrdí, že reálná osa má délku nejvýše dva.

Nechť $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ je bijektivní funkce. Uvažujme následující sjednocení intervalů

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\varphi(i) - \frac{1}{2^i}, \varphi(i) + \frac{1}{2^i} \right).$$

Jistě každé $r \in \mathbb{Q}$ leží v tomto sjednocení, vždyť $r = \varphi(j)$ pro nějaké j , a tedy

$$r \in \left(\varphi(j) - \frac{1}{2^j}, \varphi(j) + \frac{1}{2^j} \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\varphi(i) - \frac{1}{2^i}, \varphi(i) + \frac{1}{2^i} \right).$$

Protože každé reálné číslo je libovolně blízko nějakému číslu racionálnímu, leží v tomto sjednocení každé reálné číslo. Protože každý interval tohoto sjednocení je zároveň podmnožinou reálných čísel, dostáváme i druhou inkluzi, čímž dostáváme rovnost

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\varphi(i) - \frac{1}{2^i}, \varphi(i) + \frac{1}{2^i} \right)$$

Intervaly v tomto sjednocení mají délku postupně $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$. Součet těchto délek je potom

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2.$$

Protože se některé intervaly mohou překrývat, je velikost (součet délek všech intervalů, aniž bychom počítali vícekrát ty části, kde se nějaké intervaly překrývají) tohoto sjednocení nejvýše dva. Tedy délka reálné osy je nejvýše dva.

Řešení. V důkazu je řečeno, že každé reálné číslo leží libovolně blízko číslu racionálnímu, a proto každé reálné číslo leží v tomto sjednocení. Víme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{Q}: r \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

my však ε volíme v závislosti na daném $r \in \mathbb{Q}$, vždyť velikost intervalu jsme zvolili dle toho, o jaké racionální číslo se jednalo (tj. jak daleko se v našem uspořádání objevilo). Použili jsme tedy tvrzení

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad \forall \varepsilon > 0: r \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

které ale jistě neplatí. Stačí například zvolit $\varepsilon = \frac{|x-r|}{2}$, abychom ho vyvrátili.

Na tomto příkladě vidíme důležitost pořadí kvantifikátorů. ■