

# Geometrie

**Příklad 1.** Necht' je dán tečnový čtyřúhelník  $ABCD$ . Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku  $ABC$  a kružnice vepsaná trojúhelníku  $ACD$  mají společný dotyk.

*Řešení.* Kružnice vepsaná trojúhelníku  $ABC$  se dotýká úsečky  $AC$  v bodě  $T_1$  a kružnice vepsaná trojúhelníku  $ACD$  se dotýká úsečky  $AC$  v bodě  $T_2$ . Chceme ukázat, že  $T_1 = T_2$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $|CT_1| \geq |CT_2|$ . Platí

$$\begin{aligned} |AD| &= |CD| - |CT_2| + |AT_2|, \\ |BC| &= |AB| - |AT_1| + |CT_1|, \\ |T_1T_2| &= |CT_1| - |CT_2| = |AT_2| - |AT_1|. \end{aligned}$$

Dohromady máme

$$|T_1T_2| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC| - |CD| - |AB|).$$

Čtyřúhelník je tečnový, a proto

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|,$$

a tedy  $|T_1T_2| = 0$ . □

**Příklad 2.** Protilehlé strany  $AB$  a  $DE$ ,  $BC$  a  $EF$ ,  $CD$  a  $FA$  konvexního šestiúhelníka jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky  $ACE$  a  $BDF$  mají shodný obsah.

*Řešení.* Nejprve vyjádříme obsah trojúhelníka  $ACE$ . Uvnitř šestiúhelníka vyznačme body  $P, Q, R$  a to tak, že  $EC$  je úhlopříčkou v rovnoběžníku  $EDCQ$ ,  $AC$  je úhlopříčkou v rovnoběžníku  $ABCP$  a  $EA$  je úhlopříčkou v rovnoběžníku  $AREF$ . Pak platí

$$|ACE| = \frac{|ABCDEF| - |PQR|}{2} + |PQR| = \frac{|ABCDEF| + |PQR|}{2}.$$

Obsah trojúhelníka  $BDF$  spočítáme obdobným způsobem. Uvnitř šestiúhelníka vyznačme body  $S, T, U$  a to tak, že  $FB$  je úhlopříčkou v rovnoběžníku  $ABSF$ ,  $BD$  je úhlopříčkou v rovnoběžníku  $BCDT$  a  $FD$  je úhlopříčkou v rovnoběžníku  $FUDE$ . Pak

$$|BDF| = \frac{|ABCDEF| + |STU|}{2}.$$

Protože platí

$$\begin{aligned}|PQ| &= ||AB| - |ED|| = |SU|, \\ |QR| &= ||CD| - |AF|| = |ST|, \\ |PR| &= ||BC| - |EF|| = |TU|,\end{aligned}$$

jsou trojúhelníky  $PQR$  a  $STU$ , a proto  $|ACE| = |BDF|$ . □

**Příklad 3.** Necht' je dán trojúhelník  $ABC$ . Na stranách  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  jsou zvoleny body  $A_1$ ,  $B_1$  a  $C_1$  tak, že se přímky  $AA_1$ ,  $BB_1$  a  $CC_1$  protínají v jednom bodě. Označme  $M$  patu kolmice z bodu  $A_1$  na  $B_1C_1$ . Dokažte, že  $MA_1$  je osou úhlu  $\angle BMC$ .

*Řešení.* Paty kolmic z vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na stranu  $B_1C_1$  označme po řadě  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Platí

$$\begin{aligned}\frac{|AC_1|}{|C_1B|} &= \frac{|AD|}{|BE|}, \\ \frac{|CB_1|}{|B_1A|} &= \frac{|CF|}{|AD|}.\end{aligned}$$

Dohromady dostáváme

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|CF|}{|BE|}. \quad (1)$$

Podle Cevovy věty platí

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$\frac{|CF|}{|BE|} = \frac{|A_1C|}{|BA_1|}.$$

Dále platí

$$\frac{|A_1C|}{|BA_1|} = \frac{|MF|}{|EM|},$$

což znamená, že trojúhelníky  $EBM$  a  $FCM$  jsou podobné, a proto

$$|\angle FMC| = |\angle EMB|.$$

□

**Příklad 4.** Tětiva  $CD$  kružnice se středem v bodě  $O$  je kolmá na průměr  $AB$  a zároveň tětiva  $AE$  půlí úsečku  $OC$ . Dokažte, že tětiva  $DE$  půlí tětivu  $BC$ .

*Řešení.* Dokážeme obecnější tvrzení. Je-li  $M$ , resp.  $N$  průsečík  $AE$  a  $OC$ , resp. průsečík  $DE$  a  $BC$ , pak

$$\frac{|CM|}{|CO|} = \frac{|CN|}{|CB|}.$$

Oblouky  $AC$  a  $AD$  jsou shodné, a proto  $|\angle AEC| = |\angle AED|$ . Dále  $|\angle AEC| = |\angle ABC|$  a  $|\angle ABC| = |\angle OCB|$ , neboť trojúhelník  $OCB$  je rovnoramenný. Z toho plyne, že  $|\angle AED| = |\angle OCB|$ , tedy  $|\angle MEN| = |\angle MCN|$ . To znamená, že body  $M, N, E$  a  $C$  leží na jedné kružnici. Odtud dostáváme, že  $|\angle MNC| = |\angle MEC| = |\angle OBC|$ . To znamená, že trojúhelníky  $MNC$  a  $MEC$  jsou podobné, a proto  $\frac{|CM|}{|CO|} = \frac{|CN|}{|CB|}$ .  $\square$

**Příklad 5.** Nechtě je dána půlkružnice s průměrem  $AD$ . Na této půlkružnici zvolme dva body  $B$  a  $C$  (různé od  $A$  a  $D$ ). Označme  $E, F$  paty kolmic vedených na  $AD$  po řadě z bodů  $B, C$ . Označme  $P$  průsečík přímek  $AB$  a  $CD$ . Dále označme  $Q$  průsečík  $BF$  a  $EC$ . Dokažte, že  $PQ \perp AD$ .

*Řešení.* Platí  $|\angle ABD| = |\angle ACD| = 90^\circ$ . Na přímkách  $BE$  a  $CF$  vyznačme po řadě body  $K, M$  a  $L, N$  a to tak, že  $KL$  prochází bodem  $P$ ,  $MN$  prochází bodem  $Q$  a  $KL \parallel MN \parallel AD$ . Platí

$$\begin{aligned} KL &= MN, \\ |\angle KBP| &= |\angle EBA| = |\angle BDA| = |\angle BDE|, \\ |\angle PCL| &= |\angle DCF| = |\angle DCA| = |\angle FCA|. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že  $\triangle BDE \sim \triangle PBK$  a  $\triangle AFC \sim \triangle CLP$ . Dále  $\triangle APC \sim \triangle DPB$ . Z toho plyne, že

$$\frac{|KP|}{|BE|} = \frac{|BP|}{|BD|} = \frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|PL|}{|CF|} \Rightarrow \frac{|KP|}{|PL|} = \frac{|BE|}{|CF|}.$$

Z poslední rovnosti a podobnosti trojúhelníků  $BQE$  a  $CQF$  odvodíme, že

$$\frac{|KP|}{|PL|} = \frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|MQ|}{|QN|},$$

odtud

$$\frac{|EF|}{|PL|} = \frac{|KP| + |PL|}{|PL|} = \frac{|MQ| + |QN|}{|QN|} = \frac{|EF|}{|QN|},$$

a tedy

$$|QN| = |PL|,$$

což jsme chtěli dokázat.  $\square$

**Příklad 6.** Je dán libovolný trojúhelník  $ABC$ . Označme jeho úhly obvyklým způsobem. Osy úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  protínají kružnici opsanou po řadě v bodech  $A_1, B_1, C_1$ . Dokažte, že platí

$$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > |AB| + |AC| + |BC|.$$

*Řešení.* Užitím Ptolemaiovy věty dostaneme

$$|AA_1| \cdot |BC| = |AB| \cdot |A_1C| + |A_1B| \cdot |AC|. \quad (2)$$

Dále platí

$$|\angle CAA_1| = \frac{\alpha}{2} = |\angle A_1AB|,$$

a tedy  $|A_1C| = |A_1B| = t$ . Dosazením do (2) dostaneme

$$2|AA_1| = \frac{2t}{|BC|} \cdot (|AB| + |AC'|) > |AB| + |AC'|.$$

Analogicky lze odvodit

$$\begin{aligned} 2|BB_1| &> |AB| + |BC|, \\ 2|CC_1| &> |AC| + |BC|. \end{aligned}$$

Dohromady máme

$$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > \frac{|AB| + |AC|}{2} + \frac{|AB| + |BC|}{2} + \frac{|AC| + |BC|}{2} = |AB| + |AC| + |BC|.$$

□

**Příklad 7.** Kružnice  $k$  se středem v bodě  $O_1$  a kružnice  $l$  se středem v bodě  $O_2$  se protínají v bodech  $A$  a  $B$ . Označme  $E$ , resp.  $F$  průsečík polopřímky  $O_2B$  s kružnicí  $k$ , resp. průsečík polopřímky  $O_1B$  s kružnicí  $l$ . Přímka rovnoběžná s  $EF$  procházející bodem  $B$  protíná kružnici  $k$  v bodě  $M$  a kružnici  $l$  v bodě  $N$ . Dokažte, že platí

$$|MN| = |AE| + |AF|.$$

*Řešení.* Trojúhelníky  $O_1EB$  a  $O_2FB$  jsou podobné, a proto body  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $E$  a  $F$  leží na jedné kružnici. Bod  $A$  také leží na této kružnici, neboť

$$|\angle O_1EO_2| + |\angle O_1AO_2| = |\angle O_1BE| + |\angle O_1BO_2| = 180^\circ.$$

Odtud dostáváme, že

$$\begin{aligned} |\angle O_1AE| &= |\angle O_1FE| = |\angle O_1BM|, \\ |\angle FAO_2| &= |\angle FEO_2| = |\angle NBO_2|. \end{aligned}$$

Trojúhelníky  $O_1AE$  a  $O_1BM$  jsou shodné a také trojúhelníky  $O_2AF$  a  $O_2BN$  jsou shodné, a proto

$$|MN| = |MB| + |BN| = |AE| + |AF|.$$

□

**Příklad 8.** Označme  $K, L, M$  středy,  $D, E, F$  po řadě libovolné vnitřní body stran  $BC, CA, AB$  trojúhelníku  $ABC$  a dále  $K', L', M'$  středy úseček  $AD, BE$  a  $CF$ . Dokažte, že přímky  $AD, BE$  a  $CF$  se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímky  $KK', LL'$  a  $MM'$ .

*Řešení.* Body  $K', L', M'$  leží na středních příčkách  $LM, MK, KL$  trojúhelníku  $ABC$ . Protože střední příčka  $LM$  je rovnoběžná se stranou  $BC$ , plyne z podobnosti trojúhelníků  $AMK'$  a  $ABD$ , resp.  $ALK'$  a  $ACD$

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|MK'|}{|K'L|}. \quad (3)$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|KL'|}{|L'M|}, \quad (4)$$

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|LM'|}{|M'K|}. \quad (5)$$

Vynásobením vztahů (3), (4) a (5) získáme

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|} \cdot \frac{|KL'|}{|L'M|}.$$

Podle Cevovy věty pro trojúhelník  $ABC$  se přímky  $AD, BE$  a  $CF$  protínají v jednom bodě, právě když platí

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

tedy právě když

$$\frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|} \cdot \frac{|KL'|}{|L'M|} = 1.$$

To podle Cevovy věty pro trojúhelník  $KLM$  nastane, právě když se v jednom bodě protínají přímky  $KK', LL'$  a  $MM'$ .  $\square$