Příklad 1. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$13 \mid (5^{4n} + 2^{6\cdot(2n+1)}),$$
$$133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1}),$$
$$24 \mid (25^{n+1} - 72n + 23).$$

Řešení.

$$5^{4n} + 2^{6\cdot(2n+1)} = 25^{2n} + 64^{2n+1} \equiv (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 1 - 1 = 0 \pmod{13},$$
$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \equiv -12 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n = 0 \pmod{133},$$
$$25^{n+1} - 72n + 23 \equiv 1^{n+1} - 0 - 1 = 0 \pmod{24}.$$

■

Příklad 2. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí

$$19 \mid \left((13 \cdot 7^n - (-2)^{3n+5})^2 + 2\right).$$

Řešení. Počítejme

$$\begin{aligned}V(n) &= (13 \cdot 7^n - (-2)^{3n+5})^2 + 2 = (13 \cdot 7^n + 32 \cdot (-8)^n)^2 + 2 \equiv 13^2 \cdot (7^n + (-8)^n)^2 + 2 \equiv \\ &\equiv -2 \cdot (7^n + (-8)^n)^2 + 2 = -2 \cdot (49^n + 2 \cdot (-56)^n + 64^n) + 2 \equiv \\ &\equiv -2 \cdot ((-8)^n + 2 \cdot 1^n + 7^n) + 2 = -2 \cdot (7^n + (-8)^n) - 2.\end{aligned}$$

Uvědomme si, že platí

$n \pmod 3$	0	1	2
$7^n \pmod{19}$	1	7	-8
$(-8)^n \pmod{19}$	1	-8	7

Odtud

$$V(n) \equiv 0 \pmod{19} \quad \Leftrightarrow \quad n \not\equiv 0 \pmod 3.$$

■

Příklad 3. Dokažte kritérium devíti a jedenácti.

Řešení. Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí $10^k \equiv 1^k = 1 \pmod 9$ a $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$, dostáváme

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 9,$$
$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{11}.$$

■

Příklad 4. Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou taková, že $n = 10a + b$. Dokažte

$$7 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid (a - 2b),$$
$$13 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 13 \mid (a + 4b),$$
$$31 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 31 \mid (a - 3b),$$
$$91 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 91 \mid (a - 9b).$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
10a+b &\equiv 10a-20b \equiv 0 \pmod 7 &\Leftrightarrow\quad a-2b &\equiv 0 \pmod 7,\\
10a+b &\equiv 10a+40b \equiv 0 \pmod{13} &\Leftrightarrow\quad a+4b &\equiv 0 \pmod{13},\\
10a+b &\equiv 10a-30b \equiv 0 \pmod{31} &\Leftrightarrow\quad a-3b &\equiv 0 \pmod{31},\\
10a+b &\equiv 10a-90b \equiv 0 \pmod{91} &\Leftrightarrow\quad a-9b &\equiv 0 \pmod{91}.
\end{aligned}$$

■

Příklad 5. Spočtěte poslední tři cifry čísla

$$13^{14^{15}}.$$

Řešení. Počítáme $13^{14^{15}} \pmod{1000}$. Z čínské zbytkové věty víme, že stačí počítat

$$13^{14^{15}} \pmod 8 \quad \text{a} \quad 13^{14^{15}} \pmod{125}.$$

Z Eulerovy věty víme, že

$$13^4 \equiv 1 \pmod 8 \quad \text{a} \quad 13^{100} \equiv 1 \pmod{125}.$$

Stačí proto spočítat zbytek 14^{15} po dělení 4, respektive 100. Jistě

$$14^{15} \equiv 0 \pmod 4.$$

Na druhou kongruenci použijeme opět čínskou zbytkovou větu.

$$\begin{gathered}
14^{15} \equiv 0 \pmod 4,\\
14^{15} = 14 \cdot (196)^7 \equiv 14 \cdot (-4)^7 = 14 \cdot (-1024) \cdot 16 \equiv 14 \cdot 16 = 224 \equiv -1 \pmod{25},\\
14^{15} \equiv 24 \pmod{100}.
\end{gathered}$$

Dostáváme, že $14^{15} = 24 + 100k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Odtud

$$\begin{aligned}
13^{14^{15}} &= 13^{24+100k} \equiv 13^{24} = 169^{12} \equiv 44^{12} = 4^{12} \cdot 11^{12} = 16 \cdot 1024^2 \cdot 121^6 \equiv\\
&\equiv 16 \cdot (25-1)^2 \cdot (-4)^6 \equiv 16 \cdot (-49) \cdot 4 \cdot 1024 \equiv 16 \cdot 54 \cdot 24 \equiv -17 \cdot 67 \equiv -14
\end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned}
x &\equiv 1 \pmod 8,\\
x &\equiv -14 \pmod{125}.
\end{aligned}$$

Z druhé kongruence dostáváme $x = -14 + 125t$. Dosadíme do první

$$\begin{aligned}
-14 + 125t &\equiv 1 \pmod 8,\\
5t &\equiv -1 \pmod 8,\\
t &\equiv 3 \pmod 8.
\end{aligned}$$

Odtud $t = 3 + 8v$. Dosadíme $x = -14 + 125 \cdot (3 + 8v) = 361 + 1000v$. Poslední trojčíslí je tedy 361.

■