

Matematická liga

Geometrie 1

Rastislav Rehák

9. 11. 2016

1 Teorie – základní trigonometrické identity

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

2 Příklady

Příklad 1. Zkonstruujte pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky c tak, že délka těžnice přepony je geometrický průměr délek zbylých dvou stran.

Řešení. Označme délky odvěsen standardním způsobem a a b . Díky Thaletově kružnici vidíme, že délka těžnice přepony je rovna polovině délky samotné přepony. Proto můžeme požadavek ze zadání přepsat jako

$$ab = \frac{c^2}{4}.$$

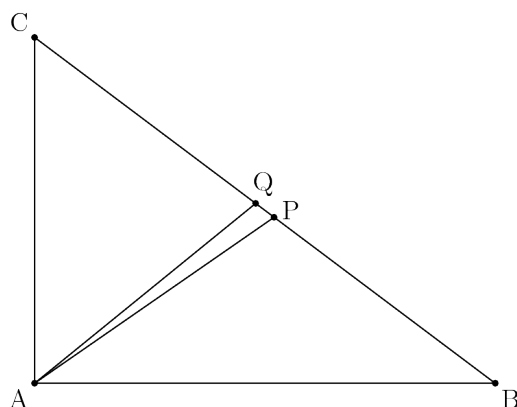
Dále si všimněme, že obsah pravoúhlého trojúhelníka můžeme vyjádřit dvěma způsoby, a to:

1. jako polovinu součinu c a délky výšky na přeponu,
2. jako $\frac{ab}{2}$.

Proto musí být délka výšky na přeponu rovna $\frac{c}{4}$. Když tedy zkonstruujeme kružnici o průměru c , zvolíme na ní dva body vzdálené o c , které určují přeponu a zkonstruujeme přímky paralelní k přeponě vzdálené od ní o $\frac{c}{4}$, tak průsečíky těchto objektů udávají vyhovující třetí vrchol trojúhelníku. $\square$

Příklad 2. Necht pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC délky a . Necht je přepona rozdělena na n stejných úseků, kde $n \geq 3$ je dané liché přirozené číslo a necht α označuje velikost úhlu při vrchole A , který je určen tím úsekem PQ , který obsahuje střed přepony, tj. $\alpha = |\angle PAQ|$ (viz obrázek). Necht h je délka výšky na přeponu. Dokažte, že platí

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$



Řešení. Zavedme souřadnice tak, že $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$. Rovnoměrné rozdělení přepony určuje rovnoměrné rozdělení na souřadných osách (kolnými průměty dělicích bodů), proto platí

$$P = \frac{n+1}{2}B + \frac{n-1}{2}C = \left(\frac{n+1}{2}b, \frac{n-1}{2}c\right),$$

$$Q = \frac{n-1}{2}B + \frac{n+1}{2}C = \left(\frac{n-1}{2}b, \frac{n+1}{2}c\right).$$

Je vidět, že $\alpha = |\angle BAQ| - |\angle BAP|$. Dále je důležité uvědomit si, že platí

$$\tan(\angle BAP) = \text{sklon}(AP) = \frac{c}{b} \cdot \frac{n-1}{n+1},$$

$$\tan(\angle BAQ) = \text{sklon}(AQ) = \frac{c}{b} \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Nakonec můžeme použít trigonometrických vzorců

$$\begin{aligned}\tan(x - y) &= \frac{\sin(x - y)}{\cos(x - y)} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x \cos y}}{\frac{1}{\cos x \cos y}} = \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.\end{aligned}$$

k vyjádření

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \tan(|\angle BAQ| - |\angle BAP|) = \frac{\frac{c}{b} \cdot \frac{n+1}{n-1} - \frac{c}{b} \cdot \frac{n-1}{n+1}}{1 + \frac{c}{b} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{n-1}{n+1}} = \frac{\frac{c}{b} \cdot \frac{4n}{n^2-1}}{1 + \frac{c^2}{b^2}} = \\ &= \frac{4nbc}{(n^2-1)(b^2+c^2)} = \frac{4nbc}{(n^2-1)a^2}.\end{aligned}$$

S ohledem na to, že obsah našho trojúhelníka můžeme vyjádřit dvěma způsoby jako

$$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ah,$$

celkem jsme dokázali, že platí

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

□