

Analytická geometrie

Teorie

Vektorový prostor, skalární součin

Reálným vektorovým prostorem dimenze d (pro $d = 2, 3$) budeme rozumět množinu uspořádaných d -tic reálných čísel. Prvky vektorového prostoru budeme nazývat *vektory*. Dále definujeme pro libovolná $v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_d, k \in \mathbb{R}$

sčítání vektorů

$$(u_1, \dots, u_d) + (v_1, \dots, v_d) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, \dots, u_d + v_d),$$

geometricky: součet vektorů odpovídá úhlopříčce rovnoběžníka, který je těmito vektory zadán, a násobení vektoru skalárem

$$k \cdot (v_1, \dots, v_d) \stackrel{\text{def}}{=} (kv_1, \dots, kv_d),$$

geometricky: vektory roztahujeme, $|k| > 1$, zkracujeme $|k| < 1$, případně měníme jejich orientaci $k < 0$.

Pro reálný vektorový prostor dimenze d definujeme *standardní skalární součin* vektorů takto

$$(u_1, \dots, u_d) \cdot (v_1, \dots, v_d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d u_i \cdot v_i.$$

Velikost vektoru $(v_1, \dots, v_d)$ klademe

$$\|(v_1, \dots, v_d)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v_1, \dots, v_d) \cdot (v_1, \dots, v_d)} = \sqrt{\sum_{i=1}^d v_i^2}.$$

Dále definujeme odchylku φ dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pomocí vztahu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \varphi,$$

zejména vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Přímka a rovina

Zabývejme se nyní rovinou, tedy případem $d = 2$. Můžeme si představit, že vektory jsou šipky v této rovině dané svým směrem, velikostí a orientací. Body roviny budeme značit pomocí velkých písmen,

jejich souřadnice v hranatých závorkách, vektory pomocí malých písmen a v závorkách kulatých. Definujme dále operaci bod + vektor:

$$[b_1, b_2] + (v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} [b_1 + v_1, b_2 + v_2],$$

geometricky: když uvážíme $[b_1, b_2]$ jako počáteční bod vektoru (v_1, v_2) , jeho koncovým bodem bude $[b_1 + v_1, b_2 + v_2]$.

Jsou-li naopak dány dva body $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$, vektor od A do B lze získat jako $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (koncový-počáteční).

Přímka je dána jednoznačně bodem $P = [p_1, p_2]$ a tzv. *směrovým vektorem* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, nabízí se tedy uvážit tzv. *parametrické vyjádření*

$$p: P + t \cdot \mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R},$$

což rozepsáno do souřadnic x, y dává

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot v_1, \\ y &= p_2 + t \cdot v_2 \end{aligned}$$

pro $t \in \mathbb{R}$.

Druhou možností, jak zadat přímku, je pomocí tzv. *obecné rovnice* přímky, tj. podobně jako lineární funkci

$$p: ax + by + c = 0,$$

kde body přímky p jsou právě takové body $[x, y]$, pro které je splněna rovnice.

Všimněme si, že pokud $a\bar{x} + b\bar{y} = 0$, pak je-li $P \in p$, pak též

$$P + t \cdot (\bar{x}, \bar{y})$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Přitom vztah

$$a\bar{x} + b\bar{y} = (a, b) \cdot (\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

vlastně říká, že vektor (a, b) je kolmý na vektor $(\bar{x}, \bar{y})$. Přímka je tak ve skutečnosti daná bodem P a jejím normálovým (tj. k ní kolmým) vektorem (a, b) .

Podívejme se nyní na případ $d = 3$. Přímku opět můžeme zadat pomocí bodu a jejího směrového vektoru. Rovinu pak můžeme zadat pomocí bodu $P = [p_1, p_2, p_3]$ a dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ takových, že $\mathbf{u} \neq k\mathbf{v}$ pro žádné $k \in \mathbb{R}$. Tomuto vyjádření říkáme opět *parametrické*. Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pak parametrické vyjádření roviny lze psát též jako

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y &= p_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z &= p_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3, \end{aligned}$$

pro $t, s \in \mathbb{R}$.

Rovinu můžeme zadat pomocí *obecné rovnice* roviny, tj. podobně jako lineární funkci dvou proměnných

$$\rho: ax + by + cz + d = 0,$$

kde body roviny ρ jsou právě ty $[x, y, z]$, pro něž je splněna rovnice.

Opět si můžeme všimnout, že vektor (a, b, c) je vlastně normálový vektor k rovině ρ .

Nabízí se otázka, zda lze pomocí rovnice vyjádřit též přímku. Nelze to udělat pomocí jediné lineární rovnice, můžeme však uvážit soustavu dvou rovnic. Jedná se vlastně o body ležící v průsečíku dvou rovin (tyto jsou zadané jednotlivými rovnicemi).

Vektorový součin

Vektorovým součinem v $\mathbb{R}^3$ budeme rozumět zobrazení dávající pro dva vektory třetí vektor, který je na ně kolmý. Pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definujeme jejich vektorový součin vztahem

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ je standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a $|\cdot|$ značí determinant matice.

Poslední vztah je možná méně explicitní, ale nabízí možnost tento vztah zobecnit do dalších dimenzí (tj. v obecné dimenzi d pro $d - 1$ vektorů takto nalezneme vektor na ně kolmý). Všimněme si, že též dostáváme vztah pro nalezení kolmého vektoru v $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ x & y \end{vmatrix} = e_1 y - e_2 x = y(1, 0) - x(0, 1) = (y, -x).$$

Úsečka, střed úsečky, těžiště trojúhelníka

Nechť jsou dány body (pro jednoduchost v $\mathbb{R}^2$) $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Úsečka je tedy dána parametricky například jako

$$A + t \cdot (B - A)$$

pro $t \in [0, 1]$ (nulový parametr t odpovídá bodu A , jednička odpovídá bodu B). Zřejmě střed úsečky nastává pro $t = \frac{1}{2}$, tedy

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] = \frac{A + B}{2}.$$

Analogicky těžiště trojúhelníka A, B, C lze velice snadno spočítat jako $T = \frac{A+B+C}{3}$.

Kružnice

Další ingrediencí, která je velmi podstatná pro řešení geometrických úloh analyticky, je kružnice. Kružnice $k(S, r)$ pro $S = [x_0, y_0]$ je dána rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Hledání průsečíku přímky (či úsečky) s kružnicí: uvažíme parametrický tvar rovnice přímky a dosadíme za x a y do rovnice kružnice. Tím získáme kvadratickou rovnici v jediné proměnné, totiž parametru t .

Volba souřadnic

Naprosto zásadní pro výpočet je volba souřadnic, tj. umístění všech objektů do souřadných os. Numerické výpočty budou často velice nepříjemné i v případě, že zvolíme umístění rozumně. Ve chvíli, kdy umístění nebude vhodné, lze očekávat komplikace velice brzy. Uvěďme si tedy několik pěkných voleb:

V případě, že nemáme zadány žádné konkrétní délky, můžeme si jednotku zvolit bez újmy na obecnosti. V tomto případě můžeme zvolit souřadnice tak, aby zadaný trojúhelník A, B, C splnil

$$A = [1, 0], \quad B = [0, 1], \quad C = [x, y] \quad x, y > 0.$$

Další možnost je

$$A = [0, 0], \quad B = [1, 0], \quad C = [x, y],$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$ jsou však libovolné takové, že $y \neq 0$. Obvykle lze předpokládat, že $y > 0$.

Kdykoli máme součástí zadání i kružnice, je třeba s nimi nakládat velice opatrně. Právě z nich často vyplynou škaredé výpočty. Pro usnadnění můžeme proto střed nějaké zadané kružnice zvolit v počátku či na některé z os.

Příklady

Na rozehřátí

Příklad 9.1. Necht' je dán trojúhelník ABC .

- Dokažte, že těžnice (respektive výšky, osy stran a osy úhlů) se protínají v jednom bodě.
- Zvolte vhodné souřadnice bodů A, B, C a odvod'te souřadnice těžiště, ortocentra a středů kružnic opsané a vepsané.

Příklad 9.2. Necht' je dána krychle $ABCDEFGH$. Položme $X = S_{AB}$, $Y = S_{EH}$ a $Z = S_{CG}$. Určete řez krychle rovinou danou body X, Y, Z .

Příklad 9.3. Dokažte Eulerovu větu: Ve čtyřúhelníku $ABCD$ se středními příčkami (spojnice protějších středů stran) MN a PQ platí: $|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|MN|^2 + |PQ|^2)$.

Příklad 9.4. Necht' jsou v rovině dány body A, B, C, D .

Dokažte, že $AB \perp CD \Leftrightarrow |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

Zajímavější příklady

Příklad 9.5. Je dán trojúhelník ABC . Strana BC je prodloužena za C do D tak, že $|CD| = |BC|$. Strana CA je prodloužena za A do E tak, že $|AE| = 2|CA|$.

Dokažte, že pokud $|AD| = |BE|$, pak trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Příklad 9.6. V rovině je dán čtverec o straně délky a . Dokažte, že součet druhých mocnin vzdáleností všech jeho vrcholů od libovolné přímky této roviny, která prochází středem daného čtverce, je konstantní. Určete tuto konstantu.

Příklad 9.7. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C . Určete, jaké jsou velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a B , prochází-li osa vnitřního úhlu při vrcholu B středem těžnice z vrcholu C .