

# Analytická geometrie

## Teorie

### Vektorový prostor, skalární součin

Reálným vektorovým prostorem dimenze  $d$  (pro  $d = 2, 3$ ) budeme rozumět množinu uspořádaných  $d$ -tic reálných čísel. Prvky vektorového prostoru budeme nazývat *vektory*. Dále definujeme pro libovolná  $v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_d, k \in \mathbb{R}$

sčítání vektorů

$$(u_1, \dots, u_d) + (v_1, \dots, v_d) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, \dots, u_d + v_d),$$

geometricky: součet vektorů odpovídá úhlopříčce rovnoběžníka, který je těmito vektory zadán, a násobení vektoru skalárem

$$k \cdot (v_1, \dots, v_d) \stackrel{\text{def}}{=} (kv_1, \dots, kv_d),$$

geometricky: vektory roztahujeme,  $|k| > 1$ , zkracujeme  $|k| < 1$ , případně měníme jejich orientaci  $k < 0$ .

Pro reálný vektorový prostor dimenze  $d$  definujeme *standardní skalární součin* vektorů takto

$$(u_1, \dots, u_d) \cdot (v_1, \dots, v_d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d u_i \cdot v_i.$$

Velikost vektoru  $(v_1, \dots, v_d)$  klademe

$$\|(v_1, \dots, v_d)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v_1, \dots, v_d) \cdot (v_1, \dots, v_d)} = \sqrt{\sum_{i=1}^d v_i^2}.$$

Dále definujeme odchylku  $\varphi$  dvou nenulových vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  pomocí vztahu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \varphi,$$

zejména vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  jsou na sebe kolmé právě tehdy, když

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

### Přímka a rovina

Zabývejme se nyní rovinou, tedy případem  $d = 2$ . Můžeme si představit, že vektory jsou šipky v této rovině dané svým směrem, velikostí a orientací. Body roviny budeme značit pomocí velkých písmen,

jejich souřadnice v hranatých závorkách, vektory pomocí malých písmen a v závorkách kulatých. Definujme dále operaci bod + vektor:

$$[b_1, b_2] + (v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} [b_1 + v_1, b_2 + v_2],$$

geometricky: když uvážíme  $[b_1, b_2]$  jako počáteční bod vektoru  $(v_1, v_2)$ , jeho koncovým bodem bude  $[b_1 + v_1, b_2 + v_2]$ .

Jsou-li naopak dány dva body  $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ , vektor od  $A$  do  $B$  lze získat jako  $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$  (koncový-počáteční).

Přímka je dána jednoznačně bodem  $P = [p_1, p_2]$  a tzv. *směrovým vektorem*  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , nabízí se tedy uvážit tzv. *parametrické vyjádření*

$$p: P + t \cdot \mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R},$$

což rozepsáno do souřadnic  $x, y$  dává

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot v_1, \\ y &= p_2 + t \cdot v_2 \end{aligned}$$

pro  $t \in \mathbb{R}$ .

Druhou možností, jak zadat přímku, je pomocí tzv. *obecné rovnice* přímky, tj. podobně jako lineární funkci

$$p: ax + by + c = 0,$$

kde body přímky  $p$  jsou právě takové body  $[x, y]$ , pro které je splněna rovnice.

Všimněme si, že pokud  $a\bar{x} + b\bar{y} = 0$ , pak je-li  $P \in p$ , pak též

$$P + t \cdot (\bar{x}, \bar{y})$$

pro všechna  $t \in \mathbb{R}$ . Přitom vztah

$$a\bar{x} + b\bar{y} = (a, b) \cdot (\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

vlastně říká, že vektor  $(a, b)$  je kolmý na vektor  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Přímka je tak ve skutečnosti daná bodem  $P$  a jejím normálovým (tj. k ní kolmým) vektorem  $(a, b)$ .

Podívejme se nyní na případ  $d = 3$ . Přímku opět můžeme zadat pomocí bodu a jejího směrového vektoru. Rovinu pak můžeme zadat pomocí bodu  $P = [p_1, p_2, p_3]$  a dvou vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  takových, že  $\mathbf{u} \neq k\mathbf{v}$  pro žádné  $k \in \mathbb{R}$ . Tomuto vyjádření říkáme opět *parametrické*. Je-li  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , pak parametrické vyjádření roviny lze psát též jako

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y &= p_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z &= p_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3, \end{aligned}$$

pro  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Rovinu můžeme zadat pomocí *obecné rovnice* roviny, tj. podobně jako lineární funkci dvou proměnných

$$\rho: ax + by + cz + d = 0,$$

kde body roviny  $\rho$  jsou právě ty  $[x, y, z]$ , pro něž je splněna rovnice.

Opět si můžeme všimnout, že vektor  $(a, b, c)$  je vlastně normálový vektor k rovině  $\rho$ .

Nabízí se otázka, zda lze pomocí rovnice vyjádřit též přímku. Nelze to udělat pomocí jediné lineární rovnice, můžeme však uvážit soustavu dvou rovnic. Jedná se vlastně o body ležící v průsečíku dvou rovin (tyto jsou zadané jednotlivými rovnicemi).

## Vektorový součin

Vektorovým součinem v  $\mathbb{R}^3$  budeme rozumět zobrazení dávající pro dva vektory třetí vektor, který je na ně kolmý. Pro  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  definujeme jejich vektorový součin vztahem

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  je standardní báze vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$  a  $|\cdot|$  značí determinant matice.

Poslední vztah je možná méně explicitní, ale nabízí možnost tento vztah zobecnit do dalších dimenzí (tj. v obecné dimenzi  $d$  pro  $d - 1$  vektorů takto nalezneme vektor na ně kolmý). Všimněme si, že též dostáváme vztah pro nalezení kolmého vektoru v  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ x & y \end{vmatrix} = e_1 y - e_2 x = y(1, 0) - x(0, 1) = (y, -x).$$

## Úsečka, střed úsečky, těžiště trojúhelníka

Nechť jsou dány body (pro jednoduchost v  $\mathbb{R}^2$ )  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$ . Úsečka je tedy dána parametricky například jako

$$A + t \cdot (B - A)$$

pro  $t \in [0, 1]$  (nulový parametr  $t$  odpovídá bodu  $A$ , jednička odpovídá bodu  $B$ ). Zřejmě střed úsečky nastává pro  $t = \frac{1}{2}$ , tedy

$$S = \left[ \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] = \frac{A + B}{2}.$$

Analogicky těžiště trojúhelníka  $A, B, C$  lze velice snadno spočítat jako  $T = \frac{A+B+C}{3}$ .

## Kružnice

Další ingrediencí, která je velmi podstatná pro řešení geometrických úloh analyticky, je kružnice. Kružnice  $k(S, r)$  pro  $S = [x_0, y_0]$  je dána rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Hledání průsečíku přímky (či úsečky) s kružnicí: uvažíme parametrický tvar rovnice přímky a dosadíme za  $x$  a  $y$  do rovnice kružnice. Tím získáme kvadratickou rovnici v jediné proměnné, totiž parametru  $t$ .

## Volba souřadnic

Naprosto zásadní pro výpočet je volba souřadnic, tj. umístění všech objektů do souřadných os. Numerické výpočty budou často velice nepříjemné i v případě, že zvolíme umístění rozumně. Ve chvíli, kdy umístění nebude vhodné, lze očekávat komplikace velice brzy. Uvěďme si tedy několik pěkných voleb:

V případě, že nemáme zadány žádné konkrétní délky, můžeme si jednotku zvolit bez újmy na obecnosti. V tomto případě můžeme zvolit souřadnice tak, aby zadaný trojúhelník  $A, B, C$  splnil

$$A = [1, 0], \quad B = [0, 1], \quad C = [x, y] \quad x, y > 0.$$

Další možnost je

$$A = [0, 0], \quad B = [1, 0], \quad C = [x, y],$$

kde  $x, y \in \mathbb{R}$  jsou však libovolné takové, že  $y \neq 0$ . Obvykle lze předpokládat, že  $y > 0$ .

Kdykoli máme součástí zadání i kružnice, je třeba s nimi nakládat velice opatrně. Právě z nich často vyplynou škaredé výpočty. Pro usnadnění můžeme proto střed nějaké zadané kružnice zvolit v počátku či na některé z os.

## Příklady

### Na rozehřátí

**Příklad 9.1.** Necht' je dán trojúhelník  $ABC$ .

- Dokažte, že těžnice (respektive výšky, osy stran a osy úhlů) se protínají v jednom bodě.
- Zvolte vhodné souřadnice bodů  $A, B, C$  a odvod'te souřadnice těžiště, ortocentra a středů kružnic opsané a vepsané.

*Řešení.*

- Těžnice.** Uvažme trojúhelník  $A = [0, 0], B = [2, 0], C = [2m, 2n]$ , kde  $m > 0$ . Známe těžiště  $T = [\frac{2m+2}{3}, \frac{2n}{3}]$ . Zbývá dokázat, že každá těžnice jej obsahuje (jistě průsečík nemůže být více než jeden bod, vždyť žádné dvě těžnice nesplynou). Těžnice jsou dány parametricky jako

| Těžnice | parametricky                  |
|---------|-------------------------------|
| $t_a$   | $[0, 0] + r \cdot (m+1, n)$   |
| $t_b$   | $[2, 0] + s \cdot (m-2, n)$   |
| $t_c$   | $[1, 0] + t \cdot (2m-1, 2n)$ |

Vidíme, že volbou  $r = s = \frac{2}{3}$  a  $t = \frac{1}{3}$  dostáváme vždy bod  $T$ .

- Výšky.** Uvažme trojúhelník  $A = [0, 0], B = [1, 0], C = [m, n]$ , kde  $x > 0$ .

| Výška | určení přímky               |
|-------|-----------------------------|
| $v_a$ | $[0, 0] + r \cdot (n, 1-m)$ |
| $v_b$ | $[1, 0] + s \cdot (n, -m)$  |
| $v_c$ | $x - m = 0$                 |

dosadíme z parametrické do obecné rovnice:

$$rn - m = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{n}[n, 1-m] = [m, \frac{m-m^2}{n}].$$

Můžeme udělat druhé dosazení (pro  $v_b$ )

$$1 + sn - m = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{m-1}{n} \quad \Rightarrow \quad V = [1, 0] + \frac{m-1}{n} \cdot (n, -m) = [m, \frac{m-m^2}{n}].$$

3. Osy stran. Zvolme  $A = [0, 0]$ ,  $B = [2, 0]$ ,  $C = [2m, 2n]$ .

| Osa strany | určení přímky                     |
|------------|-----------------------------------|
| $o_a$      | $(m-1)x + ny - m^2 - n^2 + 1 = 0$ |
| $o_b$      | $mx + ny - m^2 - n^2 = 0$         |
| $o_c$      | $x - 1 = 0$                       |

Řešíme soustavu. Protože z poslední rovnice máme  $x = 1$ , hned dosadíme a dostáváme

$$ny = m^2 + n^2 - m \quad y = \frac{m^2 + n^2 - m}{n}.$$

To dává  $S = [1, \frac{m^2 + n^2 - m}{n}]$ .

4. Osy úhlů. Zvolme opět  $A = [0, 0]$ ,  $B = [1, 0]$ ,  $C = [m, n]$ . Osa úhlu se vyznačuje tím, že body na ní mají stejnou vzdálenost od obou přímek.

Pro úhel  $\alpha$  uvažme průsečík přímek rovnoběžných s  $AB$ , respektive  $AC$ , vzdálených od této přímky o stejnou vzdálenost (ve vhodném směru - například „dovnitř“ trojúhelníka). Posouváme tedy přímku  $AB$  ve směru  $(1, 0)$  a  $AC$  ve směru  $(n, -m)$ . Posuňme o vzdálenost  $\sqrt{n^2 + m^2}$ , tj. hledáme průsečík přímek

$$\begin{aligned} p_1: nx - my - m^2 - n^2 &= 0, \\ p_2: y &= \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

To nám dává bod  $[\frac{m^2 + n^2 + m\sqrt{m^2 + n^2}}{n}, \sqrt{m^2 + n^2}]$ .

Pro úhel  $\beta$  uvažíme posun přímky  $BC$  o vektor  $(-n, m-1)$  a  $BA$  o  $(0, \sqrt{(m-1)^2 + n^2})$ . To dává

$$\begin{aligned} q_1: nx - (m-1)y + (m-1)^2 + n^2 - n &= 0 \\ q_2: y &= \sqrt{(m-1)^2 + n^2} \end{aligned}$$

To dává bod  $[\frac{(m-1) \cdot \sqrt{(m-1)^2 + n^2} - (m-1)^2 - n^2 + n}{n}, \sqrt{(m-1)^2 + n^2}]$ .

| Osa úhlu | určení přímky                                      |
|----------|----------------------------------------------------|
| $\alpha$ | $[0, 0] + r \cdot (\sqrt{m^2 + n^2} + m, n)$       |
| $\beta$  | $[1, 0] + s \cdot (m-1 - \sqrt{(m-1)^2 + n^2}, n)$ |

Řešíme proto soustavu

$$\begin{aligned} r \cdot (m + \sqrt{m^2 + n^2}) &= 1 + s \cdot (m-1 - \sqrt{(m-1)^2 + n^2}), \\ r \cdot n &= sn \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dostáváme ihned, že  $r = s$  (jistě  $n \neq 0$ ). Odtud

$$\begin{aligned} r \cdot (m + \sqrt{m^2 + n^2} - m + 1 + \sqrt{(m-1)^2 + n^2}) &= 1, \\ r &= \frac{1}{1 + \sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{(m-1)^2 + n^2}}. \end{aligned}$$

Středem kružnice vepsané je tedy bod

$$O = \frac{1}{1 + \sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{(m-1)^2 + n^2}} \cdot [m + \sqrt{m^2 + n^2}, n].$$

Poznamenejme, že obecný tvar je

$$O = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c},$$

kde  $a, b, c$  značí délky příslušných stran.

**Příklad 9.2.** Necht' je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Položme  $X = S_{AB}$ ,  $Y = S_{EH}$  a  $Z = S_{CG}$ . Určete řez krychle rovinou danou body  $X, Y, Z$ .

*Řešení.* Zvolme souřadnice takto:

$$\begin{aligned} A &= [0, 0, 2], & B &= [2, 0, 2], & C &= [2, 0, 0], & D &= [0, 0, 0], \\ E &= [0, 2, 2], & F &= [2, 2, 2], & G &= [2, 2, 0], & H &= [0, 2, 0], \\ X &= [1, 0, 2], & Y &= [0, 2, 1], & Z &= [2, 1, 0]. \end{aligned}$$

Rovina daná body  $X, Y, Z$  je dána směry

$$(1, -2, 1), \quad (1, 1, -2)$$

normála je  $(1, 1, 1)$  její rovnice je tedy

$$x + y + z - 3 = 0$$

Stačí vyřešit průsečíky s hranami krychle.

| Hrana | parametricky                    | průnik   |
|-------|---------------------------------|----------|
| $AE$  | $[0, 0, 2] + t \cdot (0, 1, 0)$ | $S_{AE}$ |
| $BF$  | $[2, 0, 2] + t \cdot (0, 1, 0)$ | —        |
| $BC$  | $[2, 0, 0] + t \cdot (0, 0, 1)$ | $S_{BC}$ |
| $GH$  | $[0, 2, 0] + t \cdot (1, 0, 0)$ | $S_{GH}$ |

Tři nalezené průsečíky spojíme s těmi zadanými a dostáváme celý řez.

**Příklad 9.3.** Dokažte Eulerovu větu: Ve čtyřúhelníku  $ABCD$  se středními příčkami (spojnice protějších středů stran)  $MN$  a  $PQ$  platí:  $|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|MN|^2 + |PQ|^2)$ .

*Řešení.* Stačí dosadit  $M = (A+B)/2$ ,  $N = (C+D)/2$ ,  $P = (B+C)/2$ ,  $Q = (D+A)/2$  a po roznásobení obou stran hned dostaneme identitu.

**Příklad 9.4.** Necht' jsou v rovině dány body  $A, B, C, D$ .

Dokažte, že  $AB \perp CD \Leftrightarrow |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ .

*Řešení.*  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow (C-A)^2 + (D-B)^2 = (D-A)^2 + (C-B)^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow A \cdot (C-D) = B \cdot (C-D) \Leftrightarrow (A-B) \cdot (C-D) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{CD}$ .

## Zajímavější příklady

**Příklad 9.5.** Je dán trojúhelník  $ABC$ . Strana  $BC$  je prodloužena za  $C$  do  $D$  tak, že  $|CD| = |BC|$ . Strana  $CA$  je prodloužena za  $A$  do  $E$  tak, že  $|AE| = 2|CA|$ .

Dokažte, že pokud  $|AD| = |BE|$ , pak trojúhelník  $ABC$  je pravoúhlý.

*Řešení.* Zvolíme si souřadnice  $A = [1, 0]$ ,  $C = [0, 0]$ ,  $B = [x, y]$ . Pak  $D = [-x, -y]$  a  $E = [3, 0]$ , z toho dostáváme  $|AD| = (x+1)^2 + y^2$  a  $|BE| = (x-3)^2 + y^2$ . Protože  $|AD| = |BE|$ , tak  $(x+1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2$ . Z toho dostáváme  $x = 1$ .

Dosadíme do bodu  $B$  a spočítáme skalární součin  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = (-1, 0) \cdot (0, y) = 0$ , a tedy je  $\angle CAB$  pravý.

**Příklad 9.6.** V rovině je dán čtverec o straně délky  $a$ . Dokažte, že součet druhých mocnin vzdáleností všech jeho vrcholů od libovolné přímky této roviny, která prochází středem daného čtverce, je konstantní. Určete tuto konstantu.

*Řešení.* Jako počátek souřadnicového systému si zvolíme  $S$  střed čtverce. Vrcholy čtverce mají souřadnice  $A = [-a/2, -a/2]$ ,  $B = [a/2, -a/2]$ ,  $C = [a/2, a/2]$ ,  $D = [-a/2, a/2]$ . Obecná přímka  $p$  procházející bodem  $S$  má parametrické vyjádření  $p: cx - y = 0$ , kde BÚNO  $c \in \langle 0, \infty \rangle$  (plyne ze symetrie).

Vzdálenost přímky od bodu je dána vztahem  $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  což v našem případě vypadá  $\frac{|cx+y|}{\sqrt{c^2+1}}$ . Po dosazení vrcholů čtverce a uocnění jednotlivých vzdáleností na druhou dostáváme:

$$\begin{aligned} & \frac{(-ca/2 - a/2)^2}{c^2 + 1} + \frac{(ca/2 - a/2)^2}{c^2 + 1} + \frac{(ca/2 + a/2)^2}{c^2 + 1} + \frac{(-ca/2 + a/2)^2}{c^2 + 1} = \\ & = a^2 \frac{(-c/2 - 1/2)^2 + (c/2 - 1/2)^2 + (c/2 + 1/2)^2 + (-c/2 + 1/2)^2}{c^2 + 1} = a^2 \end{aligned}$$

**Příklad 9.7.** V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$ . Určete, jaké jsou velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech  $A$  a  $B$ , prochází-li osa vnitřního úhlu při vrcholu  $B$  středem těžnice z vrcholu  $C$ .

*Řešení.* Zvolíme si souřadnice  $S_c = [0, 0]$  střed strany  $c$ ,  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [1, 0]$ ,  $C = [x, y]$  a  $S = [\frac{x}{2}, \frac{y}{2}]$  střed těžnice na stranu  $c$ , kde  $y = \sqrt{1-x^2}$  a  $x \in (-1, 1)$ .

Protože polopřímka  $BS_c$  půlí úhel  $\angle ABC$ , platí

$$\frac{\vec{BS} \cdot \vec{BS}_c}{|\vec{BS}| |\vec{BS}_c|} = \frac{\vec{BS}_c \cdot \vec{BC}}{|\vec{BS}_c| |\vec{BC}|}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{BS} &= (1-x, y), & |\vec{BS}| &= 2-2x \\ \vec{BS}_c &= (\frac{1-x}{2}, \frac{y}{2}), & |\vec{BS}_c| &= \frac{5}{4}-x \\ \vec{BC} &= (1, 0), & |\vec{BC}| &= 1 \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu výše a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Která má kořeny  $x = \frac{1}{2}$  a  $x = 1$ , z nichž vyhovuje jen  $x = \frac{1}{2}$ . Tedy vrchol  $C$  má souřadnice  $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$   
Nyní už nezbývá než opět využít vztahu pro úhel:

$$\cos \angle CAB = \frac{(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (1, 0)}{\sqrt{\frac{9+3}{4}} \cdot 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z toho vyplývá, že  $|\angle CAB| = \frac{\pi}{6}$  a dopočtem  $|\angle CBA| = \frac{\pi}{3}$ .