

Invarianty a Dirichletův princip

Invarianty

Chceme-li hovořit o invariantech, musíme se zabývat úlohami, ve kterých máme počáteční stav, povolené kroky a koncový stav. Otázkou pak je, zda se můžeme z počátečního stavu dostat do koncového stavu za použití povolených kroků. Invariantem v takovém procesu je něco, co se nemění. Tímto způsobem se často dokazuje neexistence řešení (tj. že není možné dojít z počátečního stavu do koncového). V informatice se invariantů používá také k dokazování korektnosti algoritmů (tj. pokud algoritmus skončí, jeho výstup bude správný).

Návodný příklad 3.1. Ve vrcholech pravidelného šestiúhelníka jsou po směru hodinových ručiček napsaná čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V každém kroku můžeme navýšit hodnotu ve dvou sousedních vrcholech o 1. Je možné, aby po konečně mnoha takových krocích bylo ve všech vrcholech napsáno stejné číslo?

Návodný příklad 3.2. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 4n - 1$. V každém kroku smažeme dvě čísla a místo nich napíšeme jejich rozdíl. Dokažte, že na konci (tj. po $4n - 2$ krocích) zůstane na tabuli sudé číslo.

Dirichletův princip

Máme-li alespoň $nk + 1$ předmětů v k přihrádkách,
pak existuje alespoň jedna přihrádka s alespoň $n + 1$ předměty.

Návodný příklad 3.3. V místnosti je n lidí. Každý si s každým podá ruku. Dokažte, že v průběhu podávání rukou vždy existují dva lidé, kteří si podali ruce se stejným počtem lidí.

Příklady

Příklad 3.1. Buď $n \in \mathbb{N}$. Na tabuli je napsáno $2n + 1$ celých čísel. V každém kroku smažeme libovolné tři z nich, označme je x, y, z , a místo nich napíšeme číslo $\frac{xy}{z} \in \mathbb{Q}$ ve zkráceném tvaru (tj. zbavíme se složených zlomků a upravíme do tvaru, kdy číselník a jmenovatel jsou nesoudělná celá čísla). Zdůvodněte, že se tímto způsobem dostaneme do situace, kdy na tabuli bude jediné racionální číslo. Označme jej $t = \frac{r}{s}$. Nalezněte nutnou a postačující podmínku k tomu, aby nejvyšší mocnina daného prvočísla p dělící $r \cdot s$ byla sudá.

Příklad 3.2. Na stole je a červených, b zelených a c modrých žetonů. V každém kroku odebereme dva žetony různé barvy a přidáme žeton barvy zbývajících. Dokažte, že pokud na konci zbývá jediný žeton, jeho barva závisí pouze na počátečním stavu.

Příklad 3.3. Mějme na začátku dvojici přirozených čísel. V každém kroku můžeme (x, y) nahradit za (y, x) , $(x + y, y)$ nebo $(x - y, y)$.

1. Lze se z počátečního stavu $(1, 2)$ dostat do stavu $(19, 79)$ respektive $(819, 357)$?
2. Pro počáteční dvojici (a, b) určete množinu stavů, do které jsme schopni se dostat.

Příklad 3.4. V pravidelném

1. pětiúhelníku
2. šestiúhelníku

jsou zakresleny všechny úhlopříčky. Na začátku máme v každý vrchol a v každý průsečík úhlopříček označený číslem 1. V jednom kroku můžeme změnit znaménko u označení všech bodů na vybrané straně či diagonále. Je možné posloupností kroků změnit označení všech bodů na -1?

Příklad 3.5. Na nekonečné šachovnici hrajeme následující hru. Na začátku máme v každém vrcholu čtverce velikosti $n \times n$ jednu figuru (zbytek nekonečné šachovnice je prázdný). V jednom tahu vybereme figuru a horizontálním či vertikálním skokem s ní přeskočíme jejího souseda do volného políčka za tímto sousedem (tj. skáče podobně jako v dámě, jen směr skoku není diagonální, ale vertikální či horizontální). Figuru, která byla přeskočena, z šachovnice odebereme. Nalezněte všechny hodnoty n , pro které je možné skončit s jedinou figurou na šachovnici.

Příklad 3.6. Uvažujme dvacet po dvou různých přirozených čísel menších než 70. Dokažte, že mezi všemi rozdíly dvojic existují čtyři, které jsou si rovny.

Příklad 3.7. Bud' n přirozené číslo nedělitelné 2 ani 5. Dokažte, že existuje násobek čísla n , jehož dekadický zápis se sestává ze samých jedniček (například pro $n = 3$ máme $37 \cdot 3 = 111$).

Příklad 3.8. Bud' S množina $2n + 1$ bodů taková, že v libovolné trojici bodů z S jsou alespoň dva z nich vzdáleny nejvýše 1. Dokažte, že existuje podmnožina S o $n + 1$ bodech taková, že ji lze celou pokrýt koulí o poloměru 1.

Příklad 3.9. Dokažte, že z libovolné množiny deseti dvojčiferných čísel můžeme vybrat dvě neprázdné a disjunktní podmnožiny takové, že součty všech jejich prvků jsou si rovny.

Příklad 3.10. 1. Dokažte, že existují $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $|a|, |b|, |c| < 10^6$, $|a| + |b| + |c| \neq 0$ taková, že

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

2. Necht' $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $|a|, |b|, |c| < 10^6$, $|a| + |b| + |c| \neq 0$. Dokažte, že

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}.$$