

Geometrie

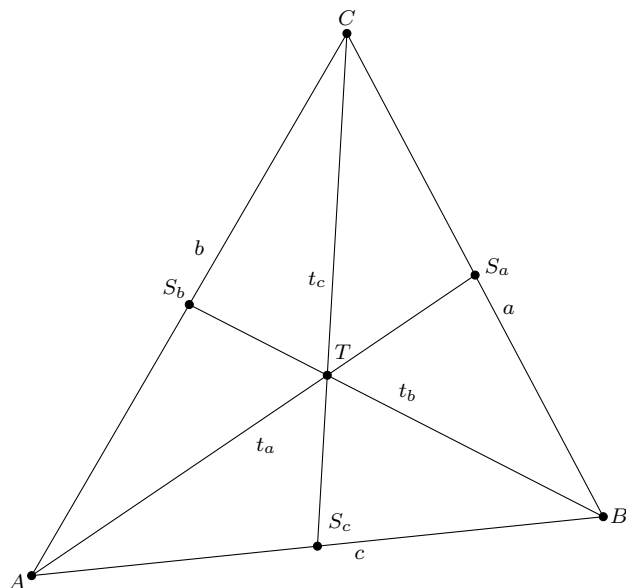
2.1 Geometrie trojúhelníka

Vzorce pro obsahy

Nechť je dán trojúhelník ABC . Označme γ úhel při vrcholu C , r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané a s poloviční obvod trojúhelníku ($2s = a + b + c$). Pak pro jeho obsah S platí následující formule:

1. $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$,
2. $S = \frac{abc}{4r}$,
3. $S = \varrho s$,
4. $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ tzv. *Heronův vzorec*.

Těžnice



Uvažujme trojúhelník ABC , délky jeho těžnic označme obvyklým způsobem t_a, t_b, t_c . Pro jejich vyjádření pomocí velikostí stran platí formule

$$\begin{aligned}t_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \\t_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, \\t_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.\end{aligned}$$

Pro těžnice platí

$$\frac{|AT|}{|TS_a|} = \frac{|BT|}{|TS_b|} = \frac{|CT|}{|TS_c|} = 2.$$

Věty a jejich důsledky

Věta 2.1 (Sinová věta). *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

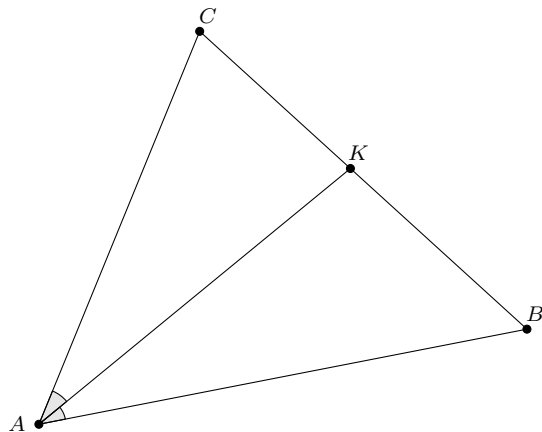
kde r je poloměr kružnice opsané.

Věta 2.2 (Kosinová věta). *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:*

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha, \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta, \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ba \cos \gamma.\end{aligned}$$

Věta 2.3 (Bisector theorem). *Nechť je dán trojúhelník ABC . Osa úhlu $\angle BAC$ protíná stranu BC v bodě K . Platí*

$$\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Věta 2.4 (Cevova). *Nechť ABC je trojúhelník a K, L, M jsou po řadě body ležící na přímkách BC, CA, AB . Přímký AK, BL a CM se protínají ve společném bodě, právě když platí*

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$

Důsledek 2.5. Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Tento bod nazýváme *těžištěm*.

Důsledek 2.6. Výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá *ortocentrum*.

Důsledek 2.7. Osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě a tento bod je středem kružnice vepsané.

2.2 Geometrie čtyřúhelníka

Tečnové a tětiové čtyřúhelníky

Definice 2.8. Čtyřúhelník se nazývá *tětiový*, jestliže mu lze opsat kružnici. Čtyřúhelník se nazývá *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici. Čtyřúhelník se nazývá *dvojstředový*, jestliže je současně tětiový i tečnový.

Čtyřúhelník je tětiový, právě když jsou součty velikostí protilehlých úhlů shodné (tj. právě když součet velikostí dvou protilehlých úhlů je 180°). Čtyřúhelník je tečnový, právě když jsou součty délek jeho protilehlých stran shodné.

Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník, pak pro jeho obsah S platí tzv. *Brahmaguptův vzorec*:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad \text{kde } 2s = a + b + c + d.$$

Pro S obsah tečnového čtyřúhelníku platí

$$S = \varrho s,$$

kde ϱ je poloměr vepsané kružnice a $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Je-li čtyřúhelník $ABCD$ dvojstředový, platí pro jeho obsah S

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Věta 2.9 (Ptolemaiova nerovnost). *Nechť a, b, c, d jsou v obvyklém označení délky stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a e, f délky jeho úhlopříček. Pak platí*

$$ac + bd \geq ef.$$

Rovnost přitom nastává, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový. Tvrzení, že v každém tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnost

$$ac + bd = ef$$

se nazývá Ptolemaiova věta.

2.3 Příklady

Příklad 2.1. Necht' je dán tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC a kružnice vepsaná trojúhelníku ACD mají společný dotyk.

Příklad 2.2. Protilehlé strany AB a DE , BC a EF , CD a FA konvexního šestiúhelníka jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají shodný obsah.

Příklad 2.3. Necht' je dán trojúhelník ABC . Na stranách BC , AC , AB jsou zvoleny body A_1 , B_1 a C_1 tak, že se přímky AA_1 , BB_1 a CC_1 protínají v jednom bodě. Označme M patu kolmice z bodu A_1 na B_1C_1 . Dokažte, že MA_1 je osou úhlu $\angle BMC$.

Příklad 2.4. Tětiva CD kružnice se středem v bodě O je kolmá na průměr AB a zároveň tětiva AE půlí úsečku OC . Dokažte, že tětiva DE půlí tětivu BC .

Příklad 2.5. Necht' je dána půlkružnice s průměrem AB . Na této půlkružnici zvolme dva body B a C (různé od A a D). Označme E, F paty kolmic vedených na AD po řadě z bodů B, C . Označme P průsečík přímek AB a CD . Dále označme Q průsečík BF a EC . Dokažte, že $PQ \perp AD$.

Příklad 2.6. Je dán libovolný trojúhelník ABC . Označme jeho úhly obvyklým způsobem. Osy úhlů α, β, γ protínají kružnici opsanou po řadě v bodech A_1, B_1, C_1 . Dokažte, že platí

$$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > |AB| + |AC| + |BC|.$$

Příklad 2.7. Kružnice k se středem v bodě O_1 a kružnice l se středem v bodě O_2 se protínají v bodech A a B . Označme E , resp. F průsečík polopřímky O_2B s kružnicí k , resp. průsečík polopřímky O_1B s kružnicí l . Přímka rovnoběžná s EF procházející bodem B protíná kružnici k v bodě M a kružnici l v bodě N . Dokažte, že platí

$$|MN| = |AE| + |AF|.$$

Příklad 2.8. Označme K, L, M středy, D, E, F po řadě libovolné vnitřní body stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC a dále K', L', M' středy úseček AD, BE a CF . Dokažte, že přímky AD, BE a CF se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK', LL' a MM' .