

Geometrie

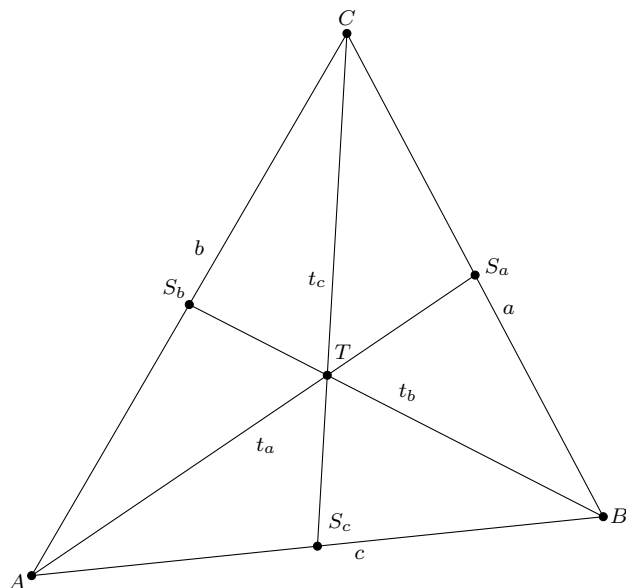
2.1 Geometrie trojúhelníka

Vzorce pro obsahy

Nechť je dán trojúhelník ABC . Označme γ úhel při vrcholu C , r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané a s poloviční obvod trojúhelníku ($2s = a + b + c$). Pak pro jeho obsah S platí následující formule:

1. $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$,
2. $S = \frac{abc}{4r}$,
3. $S = \varrho s$,
4. $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ tzv. *Heronův vzorec*.

Těžnice



Uvažujme trojúhelník ABC , délky jeho těžnic označme obvyklým způsobem t_a, t_b, t_c . Pro jejich vyjádření pomocí velikostí stran platí formule

$$\begin{aligned}t_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \\t_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, \\t_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.\end{aligned}$$

Pro těžnice platí

$$\frac{|AT|}{|TS_a|} = \frac{|BT|}{|TS_b|} = \frac{|CT|}{|TS_c|} = 2.$$

Věty a jejich důsledky

Věta 2.1 (Sinová věta). *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

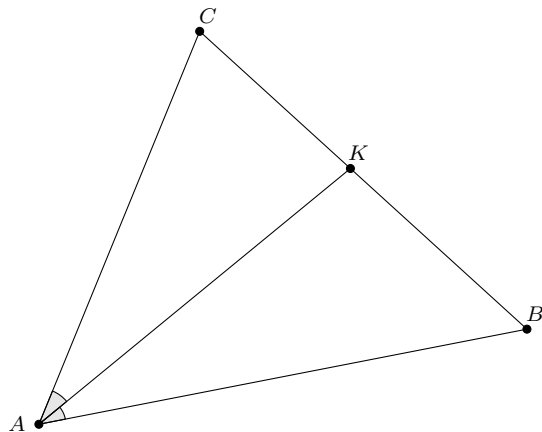
kde r je poloměr kružnice opsané.

Věta 2.2 (Kosinová věta). *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:*

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha, \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta, \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ba \cos \gamma.\end{aligned}$$

Věta 2.3 (Bisector theorem). *Nechť je dán trojúhelník ABC . Osa úhlu $\angle BAC$ protíná stranu BC v bodě K . Platí*

$$\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Věta 2.4 (Cevova). *Nechť ABC je trojúhelník a K, L, M jsou po řadě body ležící na přímkách BC, CA, AB . Přímký AK, BL a CM se protínají ve společném bodě, právě když platí*

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$

Důsledek 2.5. Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Tento bod nazýváme *těžištěm*.

Důsledek 2.6. Výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá *ortocentrum*.

Důsledek 2.7. Osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě a tento bod je středem kružnice vepsané.

2.2 Geometrie čtyřúhelníka

Tečnové a tětiové čtyřúhelníky

Definice 2.8. Čtyřúhelník se nazývá *tětiový*, jestliže mu lze opsat kružnici. Čtyřúhelník se nazývá *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici. Čtyřúhelník se nazývá *dvojstředový*, jestliže je současně tětiový i tečnový.

Čtyřúhelník je tětiový, právě když jsou součty velikostí protilehlých úhlů shodné (tj. právě když součet velikostí dvou protilehlých úhlů je 180°). Čtyřúhelník je tečnový, právě když jsou součty délek jeho protilehlých stran shodné.

Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník, pak pro jeho obsah S platí tzv. *Brahmaguptův vzorec*:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad \text{kde } 2s = a + b + c + d.$$

Pro S obsah tečnového čtyřúhelníku platí

$$S = \varrho s,$$

kde ϱ je poloměr vepsané kružnice a $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Je-li čtyřúhelník $ABCD$ dvojstředový, platí pro jeho obsah S

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Věta 2.9 (Ptolemaiova nerovnost). *Nechť a, b, c, d jsou v obvyklém označení délky stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a e, f délky jeho úhlopříček. Pak platí*

$$ac + bd \geq ef.$$

Rovnost přitom nastává, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový. Tvrzení, že v každém tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnost

$$ac + bd = ef$$

se nazývá Ptolemaiova věta.

2.3 Příklady

Příklad 2.1. Necht' je dán tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC a kružnice vepsaná trojúhelníku ACD mají společný dotyk.

Řešení. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká úsečky AC v bodě T_1 a kružnice vepsaná trojúhelníku ACD se dotýká úsečky AC v bodě T_2 . Chceme ukázat, že $T_1 = T_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|CT_1| \geq |CT_2|$. Platí

$$\begin{aligned} |AD| &= |CD| - |CT_2| + |AT_2|, \\ |BC| &= |AB| - |AT_1| + |CT_1|, \\ |T_1T_2| &= |CT_1| - |CT_2| = |AT_2| - |AT_1|. \end{aligned}$$

Dohromady máme

$$|T_1T_2| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC| - |CD| - |AB|).$$

Čtyřúhelník je tečnový, a proto

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|,$$

a tedy $|T_1T_2| = 0$. □

Příklad 2.2. Protilehlé strany AB a DE , BC a EF , CD a FA konvexního šestiúhelníka jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají shodný obsah.

Řešení. Nejprve vyjádříme obsah trojúhelníka ACE . Uvnitř šestiúhelníka vyznačme body P, Q, R a to tak, že EC je úhlopříčkou v rovnoběžníku $EDCQ$, AC je úhlopříčkou v rovnoběžníku $ABCP$ a EA je úhlopříčkou v rovnoběžníku $AREF$. Pak platí

$$|ACE| = \frac{|ABCDEF| - |PQR|}{2} + |PQR| = \frac{|ABCDEF| + |PQR|}{2}.$$

Obsah trojúhelníka BDF spočítáme obdobným způsobem. Uvnitř šestiúhelníka vyznačme body S, T, U a to tak, že FB je úhlopříčkou v rovnoběžníku $ABSF$, BD je úhlopříčkou v rovnoběžníku $BCDT$ a FD je úhlopříčkou v rovnoběžníku $FUDE$. Pak

$$|BDF| = \frac{|ABCDEF| + |STU|}{2}.$$

Protože platí

$$\begin{aligned} |PQ| &= ||AB| - |ED|| = |SU|, \\ |QR| &= ||CD| - |AF|| = |ST|, \\ |PR| &= ||BC| - |EF|| = |TU|, \end{aligned}$$

jsou trojúhelníky PQR a STU , a proto $|ACE| = |BDF|$. □

Příklad 2.3. Necht' je dán trojúhelník ABC . Na stranách BC , AC , AB jsou zvoleny body A_1 , B_1 a C_1 tak, že se přímky AA_1 , BB_1 a CC_1 protínají v jednom bodě. Označme M patu kolmice z bodu A_1 na B_1C_1 . Dokažte, že MA_1 je osou úhlu $\angle BMC$.

Řešení. Paty kolmic z vrcholů A, B, C na stranu B_1C_1 označme po řadě D, E, F . Platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AD|}{|BE|},$$

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CF|}{|AD|}.$$

Dohromady dostáváme

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|CF|}{|BE|}. \quad (2.1)$$

Podle Cevovy věty platí

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1.$$

Dosazením do (2.1) dostaneme

$$\frac{|CF|}{|BE|} = \frac{|A_1C|}{|BA_1|}.$$

Dále platí

$$\frac{|A_1C|}{|BA_1|} = \frac{|MF|}{|EM|},$$

což znamená, že trojúhelníky EBM a FCM jsou podobné, a proto

$$|\angle FMC| = |\angle EMB|.$$

□

Příklad 2.4. Tětiva CD kružnice se středem v bodě O je kolmá na průměr AB a zároveň tětiva AE půlí úsečku OC . Dokažte, že tětiva DE půlí tětivu BC .

Řešení. Dokážeme obecnější tvrzení. Je-li M , resp. N průsečík AE a OC , resp. průsečík DE a BC , pak

$$\frac{|CM|}{|CO|} = \frac{|CN|}{|CB|}.$$

Oblouky AC a AD jsou shodné, a proto $|\angle AEC| = |\angle AED|$. Dále $|\angle AEC| = |\angle ABC|$ a $|\angle ABC| = |\angle OCB|$, neboť trojúhelník OCB je rovnoramenný. Z toho plyne, že $|\angle AED| = |\angle OCB|$, tedy $|\angle MEN| = |\angle MCN|$. To znamená, že body M, N, E a C leží na jedné kružnici. Odtud dostáváme, že $|\angle MNC| = |\angle MEC| = |\angle OBC|$. To znamená, že trojúhelníky MNC a MEC jsou podobné, a proto $\frac{|CM|}{|CO|} = \frac{|CN|}{|CB|}$. □

Příklad 2.5. Necht' je dána půlkružnice s průměrem AD . Na této půlkružnici zvolme dva body B a C (různé od A a D). Označme E, F paty kolmic vedených na AD po řadě z bodů B, C . Označme P průsečík přímk AB a CD . Dále označme Q průsečík BF a EC . Dokažte, že $PQ \perp AD$.

Řešení. Platí $|\angle ABD| = |\angle ACD| = 90^\circ$. Na přímkách BE a CF vyznačme po řadě body K, M a L, N a to tak, že KL prochází bodem P , MN prochází bodem Q a $KL \parallel MN \parallel AD$. Platí

$$KL = MN,$$

$$|\angle KBP| = |\angle EBA| = |\angle BDA| = |\angle BDE|,$$

$$|\angle PCL| = |\angle DCF| = |\angle DCA| = |\angle FCA|.$$

Odtud dostáváme, že $\triangle BDE \sim \triangle PBK$ a $\triangle AFC \sim \triangle CLP$. Dále $\triangle APC \sim \triangle DPB$. Z toho plyne, že

$$\frac{|KP|}{|BE|} = \frac{|BP|}{|BD|} = \frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|PL|}{|CF|} \Rightarrow \frac{|KP|}{|PL|} = \frac{|BE|}{|CF|}.$$

Z poslední rovnosti a podobnosti trojúhelníků BQE a CQF odvodíme, že

$$\frac{|KP|}{|PL|} = \frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|MQ|}{|QN|},$$

odtud

$$\frac{|EF|}{|PL|} = \frac{|KP| + |PL|}{|PL|} = \frac{|MQ| + |QN|}{|QN|} = \frac{|EF|}{|QN|},$$

a tedy

$$|QN| = |PL|,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Příklad 2.6. Je dán libovolný trojúhelník ABC . Označme jeho úhly obvyklým způsobem. Osy úhlů α, β, γ protínají kružnici opsanou po řadě v bodech A_1, B_1, C_1 . Dokažte, že platí

$$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > |AB| + |AC| + |BC|.$$

Řešení. Užitím Ptolemaiovy věty dostaneme

$$|AA_1| \cdot |BC| = |AB| \cdot |A_1C| + |A_1B| \cdot |AC|. \quad (2.2)$$

Dále platí

$$|\angle CAA_1| = \frac{\alpha}{2} = |\angle A_1AB|,$$

a tedy $|A_1C| = |A_1B| = t$. Dosazením do (2.2) dostaneme

$$2|AA_1| = \frac{2t}{|BC|} \cdot (|AB| + |AC|) > |AB| + |AC|.$$

Analogicky lze odvodit

$$2|BB_1| > |AB| + |BC|,$$

$$2|CC_1| > |AC| + |BC|.$$

Dohromady máme

$$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > \frac{|AB| + |AC|}{2} + \frac{|AB| + |BC|}{2} + \frac{|AC| + |BC|}{2} = |AB| + |AC| + |BC|.$$

$\square$

Příklad 2.7. Kružnice k se středem v bodě O_1 a kružnice l se středem v bodě O_2 se protínají v bodech A a B . Označme E , resp. F průsečík polopřímky O_2B s kružnicí k , resp. průsečík polopřímky O_1B s kružnicí l . Přímka rovnoběžná s EF procházející bodem B protíná kružnici k v bodě M a kružnici l v bodě N . Dokažte, že platí

$$|MN| = |AE| + |AF|.$$

Řešení. Trojúhelníky O_1EB a O_2FB jsou podobné, a proto body O_1 , O_2 , E a F leží na jedné kružnici. Bod A také leží na této kružnici, neboť

$$|\angle O_1EO_2| + |\angle O_1AO_2| = |\angle O_1BE| + |\angle O_1BO_2| = 180^\circ.$$

Odtud dostáváme, že

$$\begin{aligned} |\angle O_1AE| &= |\angle O_1FE| = |\angle O_1BM|, \\ |\angle FAO_2| &= |\angle FEO_2| = |\angle NBO_2|. \end{aligned}$$

Trojúhelníky O_1AE a O_1BM jsou shodné a také trojúhelníky O_2AF a O_2BN jsou shodné, a proto

$$|MN| = |MB| + |BN| = |AE| + |AF|.$$

□

Příklad 2.8. Označme K, L, M středy, D, E, F po řadě libovolné vnitřní body stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC a dále K', L', M' středy úseček AD, BE a CF . Dokažte, že přímky AD, BE a CF se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK', LL' a MM' .

Řešení. Body K', L', M' leží na středních příčkách LM, MK, KL trojúhelníku ABC . Protože střední příčka LM je rovnoběžná se stranou BC , plyne z podobnosti trojúhelníků AMK' a ABD , resp. ALK' a ACD

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|MK'|}{|K'L|}. \quad (2.3)$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|KL'|}{|L'M|}, \quad (2.4)$$

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|LM'|}{|M'K|}. \quad (2.5)$$

Vynásobením vztahů (2.3), (2.4) a (2.5) získáme

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|} \cdot \frac{|KL'|}{|L'M|}.$$

Podle Cevovy věty pro trojúhelník ABC se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě, právě když platí

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

tedy právě když

$$\frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|} \cdot \frac{|KL'|}{|L'M|} = 1.$$

To podle Cevovy věty pro trojúhelník KLM nastane, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK', LL' a MM' . □