

Návodné příklady

Příklad 1. Najděte základy z všech číselných soustav, ve kterých $(41)_z$ dělí $(1001)_z$.

Příklad 2. Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základu $z \geq 5$ platí následující kritérium dělitelnosti: trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n , právě když je číslem n dělitelné číslo $c + 3b - 4a$.

Příklad 3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo.

Příklad 4. Hledané čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Zapišeme-li jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší číslo, které je také dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo.

Příklad 5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$3^{n+3} \mid 1997^{3^n} + 1.$$

Příklad 6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$n \mid (3^n - 2) \quad \Rightarrow \quad 3^n - 1 \mid (3^{3^n - 1} - 3).$$

Příklad 7. Aritmetický průměr několika navzájem různých prvočísel se rovná 27. Určete, jaké největší prvočíslo mezi nimi může být.

Nápověda k příkladům

Hint 1. Uvědomte si, jak převést číslo zapsané v soustavě o základu z do standardní desítkové soustavy. Podobně jako v desítkové soustavě můžeme rozepsat

$$1568 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0,$$

lze tuto úvahu snadno zobecnit pro libovolný základ $z \in \mathbb{N}$

$$(1568)_z = z^3 + 5z^2 + 6z + 8.$$

Dále můžete využít Euklidův algoritmus.

Hint 2. Podobně jako v předchozím využijte přepisu původního čísla do desítkové soustavy. Protože se jedná o kritérium dělitelnosti, musí platit pro všechna $(abc)_z$. Vhodnou volbou cifer a, b, c lze získat některá čísla, která n musí dělit.

Hint 3. Uvažme $m, n \in \mathbb{Z}$ taková, že $(m, n) = 1$, kde (m, n) značí největšího společného dělitele čísel m, n . Pak platí

$$(m, m+n) = 1 \quad a \quad (m^2, m+n) = 1.$$

Hint 4. Uvědomte si, že čísla m, n dávají stejný zbytek po dělení číslem k právě tehdy, když k dělí jejich rozdíl.

Hint 5. Zápis a^{b^c} lze zapsat s využitím závorek jako $a^{(b^c)}$. Dále lze například využít vztahů

$$\begin{aligned} a^{b+1} &= a \cdot a^b, \\ a^{b \cdot c} &= (a^b)^c = (a^c)^b, \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Hint 6. Využijte následující definice dělitelnosti pro celá čísla a, b :

Řekneme, že číslo a dělí číslo b , píšeme $a \mid b$, jestliže existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \cdot k = b$.

Hint 7. Nalezněte horní hranici, pro hledané prvočíslo (tj. omezte ho shora). Je možné, aby v uvažovaném aritmetickém průměru mohla být všechna „malá“ prvočísla?