

Soutěžní příklady

Příklad 1. Uvažte dvě přirozená čísla $(15)_z$ a $(26)_z$ zapsaná v číselné soustavě o základu z , kde $z \geq 7$ je přirozené číslo. Určete všechny hodnoty z , pro něž jsou čísla $(15)_z$ a $(26)_z$ nesoudělná.

Příklad 2. Dokažte, že dané přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů

$$\begin{aligned}(A+1)^2 - A, \\ (A+2)^2 - A, \\ (A+3)^2 - A, \\ \vdots \\ (A+n)^2 - A\end{aligned}$$

dělitelný číslem n .

Příklad 3. Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součet má poslední cifru 3, rozdíl je prvočíslo a součin je druhou mocninou přirozeného čísla.

Příklad 4. 1. Dokažte:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+2} \mid 2013^{2^n} - 1 \quad \text{a zároveň} \quad 2^{n+3} \nmid 2013^{2^n} - 1.$$

2. Nalezněte všechna $k \in \mathbb{Z}$ splňující:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+2} \mid k^{2^n} - 1 \quad \text{a zároveň} \quad 2^{n+3} \nmid k^{2^n} - 1.$$

Příklad 5. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s obvodem 180, jejichž délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Příklad 6. Dokažte, že číslo $5^n + 7^n + 13^n$ je složené pro každé přirozené číslo n .