

Soutěžní příklady

Příklad 1.

Na schodišti o n schodech hrajeme následující hru:

- Na začátku si stoupneme na první schod (tj. krokem dolů se dostaneme pod schodiště, $n - 1$ kroky nahoru schodiště vyjdeme).
- Na každém schodu se rozhodujeme: s pravděpodobností p uděláme krok nahoru, v opačném případě (s pravděpodobností $1 - p$) krok dolů.
- Hra končí, dostaneme-li se pod schodiště či jej vyjdeme.

Spočtete s jakou pravděpodobností schodiště vyjdeme, když

- (a) $n = 4$ a $p = \frac{3}{5}$ (chceme se posunout o 3 schody nahoru, přičemž krok nahoru uděláme s pravděpodobností 60%, jinak jdeme dolů),
- (b) n je libovolné a $p = \frac{1}{2}$.

Příklad 2. (a) V každém vrcholu pravidelného 2016úhelníku leží právě jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout

- na 32 hromádek po 63 mincích,
- na 16 hromádek po 126 mincích,
- na 63 hromádek po 32 mincích.

(b) Místo 2016úhelníku nyní uvažujte pravidelný n -úhelník a rozhodněte, pro která $r, s \in \mathbb{N}$, $r \cdot s = n$, je možné mince přesunout

- na r hromádek po s mincích.

Příklad 3. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která jsou čísla p_{n-1} , p_n a p_{n+1} sudá.

Příklad 4. *Uvažme rovnice*

$$a_1 \circ_1 a_1 \bullet_1 a_1 = n,$$

$$a_2 \circ_2 a_2 \bullet_2 a_2 = n,$$

$$\vdots$$

$$a_k \circ_k a_k \bullet_k a_k = n,$$

kde $n, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je $\circ_i, \bullet_i \in \{+, -, \cdot, :\}$ a pro $i \neq j$ je $a_i \neq a_j$.

- Určete největší $k \in \mathbb{N}$, pro které lze doplnit do každé z k rovnic za $\circ_i$ a $\bullet_i$ některou z operací $+, -, \cdot, :$ tak, aby všechny rovnice platily.
- Pro takové k určete nejmenší možné $n \in \mathbb{N}$.

Například snadno vidíme, že $k \geq 4$, vždyť

$$1 \circ_1 1 \bullet_1 1 = 3,$$

$$2 \circ_2 2 \bullet_2 2 = 3,$$

$$3 \circ_3 3 \bullet_3 3 = 3,$$

$$4 \circ_4 4 \bullet_4 4 = 3,$$

lze totiž doplnit

$$1 + 1 + 1 = 3,$$

$$2 + 2 : 2 = 3,$$

$$3 + 3 - 3 = 3,$$

$$4 - 4 : 4 = 3.$$

Návodné příklady

Příklad 5. V každém vrcholu pravidelného 2014úhelníku leží právě jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout

- na 1007 hromádek po 2 mincích,
- na 2 hromádky po 1007 mincích.

Příklad 6. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Označme dále a_n počet všech slov délky n končících na A , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Dokažte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí: } p_n = a_n + a_{n+2}.$$

Řešení

Řešení 1. Výhrou budeme rozumět situaci, kdy jsme schodiště vyšli, prohrou situaci, kdy jsme z něj sestoupili dolů. Ozačme p_i pravděpodobnost toho, že vyhraje z i -tého schodu. Tuto pravděpodobnost můžeme vyjádřit jako

$$p_i = p \cdot p_{i+1} + (1 - p) \cdot p_{i-1},$$

pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$, kde $p_0 = 0$ a $p_n = 1$. Stačí si totiž uvědomit, že pravděpodobnost, že vyhraje z i -tého schodu je vlastně pravděpodobnost, že jsme udělali krok nahoru a vyhraje z tohoto schodu, plus pravděpodobnost, že jsme udělali krok dolů a odtud vyhraje. Přitom víme, že na n -tém schodu vyhráváme vždy (tj. s pravděpodobností 1) a na „nultém“ schodu vždy prohráváme (tj. vyhráváme s pravděpodobností 0).

(a) Dle předchozího vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{5}p_2 \\ p_2 &= \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5}p_1 \\ p_3 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}p_2 \end{aligned}$$

Dosadíme p_1 za p_2 do druhé rovnice a odtud vyjádříme p_2 v závislosti na p_3

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}p_2 \right) \\ \frac{19}{25}p_2 &= \frac{3}{5}p_3 \\ p_2 &= \frac{15}{19}p_3 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme do poslední rovnice za p_2 a spočítáme p_3 .

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{15}{19}p_3 \right) \\ \frac{13}{19}p_3 &= \frac{3}{5} \\ p_3 &= \frac{57}{65} \end{aligned}$$

A zpětně vyjádříme hledanou hodnotu p_1

$$p_1 = \frac{3}{5}p_2 = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{15}{19} \cdot p_3 \right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{15}{19} \cdot \frac{57}{65} \right) = \frac{27}{65}.$$

(b) Opět vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{1}{2}p_2 \\
 p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_1 \\
 p_3 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_2 \\
 &\vdots \\
 p_{n-2} &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-3} \\
 p_{n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{n-2}
 \end{aligned}$$

a postupně dosazujeme

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{4}p_2 \\
 p_2 &= \frac{2}{3}p_3 \\
 p_3 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{2}{6}p_3 \\
 p_3 &= \frac{3}{4}p_4 \\
 p_4 &= \frac{1}{2}p_5 + \frac{3}{8}p_4 \\
 p_4 &= \frac{4}{5}p_5
 \end{aligned}$$

Všimněme si, že $p_i = \frac{i}{i+1}p_{i+1}$. Dokažme toto tvrzení obecně indukcí. Zjevně pro $i = 1$ tvrzení platí.

Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tj. $p_{k-1} = \frac{k-1}{k}p_k$, pak

$$\begin{aligned}
 p_k &= \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1} \\
 p_k &= \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{k}p_k\right) \\
 \frac{k+1}{2k}p_k &= \frac{1}{2}p_{k+1} \\
 p_k &= \frac{k}{k+1}p_{k+1}
 \end{aligned}$$

tím je tvrzení dokázáno. Odtud dostáváme, že $p_{n-1} = \frac{n-1}{n}p_n = \frac{n-1}{n}$. Sečtením všech rovnic původní soustavy dostáváme

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_{n-1}) = \frac{1}{2},$$

tedy $p_1 = 1 - p_{n-1}$. Odtud

$$p_1 = \frac{1}{n}.$$

Řešení 2,5. Budeme řešit druhou část (první z ní pak plyne). Rozebereme případy dle parity čísel r, s .

- Jestliže $2 \nmid s$, pak rozdělíme n -úhelník na r „výsečí“ délky s , kde „výsečí“ rozumíme s po sobě jdoucích vrcholů. Protože je délka této „výseče“ lichá, stačí přesouvat mince zároveň od obou krajů směrem ke středovému vrcholu. Každý přesun jedné dvojice mincí posouvá jednu minci ve směru a druhou proti směru hodinových ručiček (tj. tuto úvahu skutečně můžeme udělat pro každou výseč zvlášť). Každá „výseč“ nám pak dá jednu hromádku po s mincích, celkem nám všechny výseče dají požadovaných r hromádek po s mincích.
- Jestliže $2 \mid r$, pak uvažme osu souměrnosti tohoto mnohoúhelníka, která neprochází žádným vrcholem. Tím se nám mnohoúhelník rozpadne na dvě části. Když posuneme minci v jedné části a v druhé uděláme osově souměrný posun, bude právě jeden z těchto posunů ve směru hodinových ručiček. Díky tomu stačí v jedné polorovině posouvat mincemi naprosto libovolně tak, abychom dostali $\frac{r}{2}$ hromádek po s mincích a v druhé polorovině nám příslušné osově souměrné posuny dají totéž. Tím získáme r hromádek po s mincích.
- Jestliže $2 \nmid r$ a $2 \mid s$, pak budeme chtít dokázat, že mince přesunout požadovaným způsobem nelze. Označme vrcholy po řadě $1, 2, \dots, n$, dále $m(i)$ nechť je počet mincí ve vrcholu i a nakonec

$$S = \sum_{i=1}^n i \cdot m(i).$$

Protože v každém kroku jednu minci posuneme po směru a jednu proti směru hodinových ručiček, hodnota S se modulo n nemění (tj. zbytek po dělení čísla S číslem n se posunutím mincí nemění). Snadno spočítáme počáteční hodnotu S jako

$$S_1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

a hodnotu S pro situaci, kdy máme r hromádek po s mincích jako

$$S_2 = s \sum_{i=1}^r x_i,$$

kde $x_1, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ říkají, ve kterých vrcholech se tyto hromádky nacházejí. Kdyby přesunout mince požadovaným způsobem šlo, pak čísla S_1 a S_2 dávají stejný zbytek po dělení číslem n , tj. platí $n \mid S_1 - S_2$. Odtud bychom dostali

$$\begin{aligned} n \mid \frac{n(n+1)}{2} - s \sum_{i=1}^r x_i &\Leftrightarrow rs \mid \frac{rs(rs+1)}{2} - s \sum_{i=1}^r x_i \Leftrightarrow 2r \mid r(rs+1) - 2 \sum_{i=1}^r x_i \\ &\Rightarrow 2 \mid r(rs+1) - 2 \sum_{i=1}^r x_i \Rightarrow 2 \mid r(rs+1) \end{aligned}$$

což je spor (vždyť $2 \nmid r$ a $2 \mid s$).

Řešení 3.6. Označme postupně $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$, $(bb)_n$ počet vyhovujících slov délky n končících na aa , ab , ba , bb . Snadno rozmyslíme, že pro $n \geq 3$ platí

$$\begin{aligned}(aa)_n &= (ba)_{n-1} \\ (ba)_n &= (bb)_{n-1} \\ (bb)_n &= (ab)_{n-1} \\ (ab)_n &= (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1}\end{aligned}$$

a navíc vidíme, že pro $n \geq 2$ můžeme p_n spočítat jako

$$p_n = (aa)_n + (ab)_n + (ba)_n + (bb)_n.$$

To nám dohromady s počátečními podmínkami

$$p_1 = 2, \quad (aa)_2 = (ab)_2 = (ba)_2 = (bb)_2 = 1$$

dává rekurentní vzorec pro výpočet p_n . Protože nás zajímá jen parita p_n podívejme se na prvních několik hodnot $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$, $(bb)_n$, p_n modulo 2 (tj. na zbytky po dělení dvěma).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$(aa)_n$	-	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
$(ba)_n$	-	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
$(bb)_n$	-	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
$(ab)_n$	-	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
p_n	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Všimněme si, že pro $n = 17$ se nám zopakoval sloupec $n = 2$. Z rekurentní formule je zřejmé, že i následující sloupce se budou opakovat (s periodou 15). Nyní chceme nalézt ve spodním řádku tři po sobě jdoucí nuly (které odpovídají sudým číslům p_n). Odtud dostáváme řešení

$$n \equiv 10 \pmod{15}, \quad n = 15k + 10, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}_0.$$

Na závěr poznamenejme, že kdybychom připustili, že $p_0 = 0$, pak je i $n = 1$ řešením.

Řešme nyní návodnou úlohu. Dosaďme do rekurentních vztahů pro $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$ a $(bb)_n$. Pro $n \geq 2$ platí:

$$\begin{aligned}(aa)_{n+2} &= (ba)_{n+1} = (bb)_n \\ (ba)_{n+2} &= (bb)_{n+1} = (ab)_n \\ a_n &= (aa)_n + (ba)_n \\ p_n &= (aa)_n + (ba)_n + (ab)_n + (bb)_n = a_n + (ba)_{n+2} + (aa)_{n+2} = a_n + a_{n+2}.\end{aligned}$$

Řešení. Řešení existuje velké množství, můžeme doplnit operace a závorky například následujícím způsobem

$$\begin{array}{lll} (1 + 1 + 1)! = 6 & \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6 & 7 - 7 : 7 = 6 \\ 2 + 2 + 2 = 6 & 5 + 5 : 5 = 6 & \lfloor \sqrt{8} \rfloor + \lfloor \sqrt{8} \rfloor + \lfloor \sqrt{8} \rfloor = 6 \\ 3 \cdot 3 - 3 = 6 & 6 + 6 - 6 = 6 & \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9} = 6 \end{array}$$

Snadno rozmyslíme, že nám ve skutečnosti stačí závorky, dolní a horní celá část, logaritmus, sčítání a faktorial pro libovolnou rovnici $x \ x \ x = 6$.

Řešení. Máme celkem 16 možností, jak můžeme operace $+$, $-$, $\cdot$, $:$ dosadit. Rozmysleme, co každá možnost znamená pro n , pokud má platit rovnice $a \circ a \bullet a = n$.

$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n
$+$	$+$	$3a$	$-$	$+$	a	$\cdot$	$+$	$a \cdot (a + 1)$	$:$	$+$	$a + 1$
$+$	$-$	a	$-$	$-$	$-a$	$\cdot$	$-$	$a \cdot (a - 1)$	$:$	$-$	$1 - a$
$+$	$\cdot$	$a \cdot (a + 1)$	$-$	$\cdot$	$-a(a - 1)$	$\cdot$	$\cdot$	a^3	$:$	$\cdot$	a
$+$	$:$	$a + 1$	$-$	$:$	$a - 1$	$\cdot$	$:$	a	$:$	$:$	$a = 1$

Okamžitě můžeme vyloučit kombinace $-$, $-$, $-$, $\cdot$, $:$, $-$, protože $a, n \in \mathbb{N}$. Následně můžeme omezit duplicity (například z možností $+$: a : $+$ budeme uvažovat pouze jednu, protože pro dané n bychom dostali stejnou trojici a), tj. omezíme se na

$\circ$	$\bullet$	n	$\circ$	$\bullet$	n
$+$	$+$	$3a$	$-$	$:$	$a - 1$
$+$	$-$	a	$\cdot$	$-$	$a \cdot (a - 1)$
$+$	$\cdot$	$a \cdot (a + 1)$	$\cdot$	$\cdot$	a^3
$+$	$:$	$a + 1$			

Ukažme, že žádné $n \in \mathbb{N}$ nemůže být třetí mocninou a zároveň součinem dvou po sobě jdoucích čísel. Předpokládejme, že $n = a(a + 1)$. Jestliže nějaké prvočíslo $p \mid a$, pak $p \nmid a + 1$. Proto pokud $p^3 \mid n$, pak p^3 dělí právě jedno z čísel a , $a + 1$. Proto $a = k^3$, $a + 1 = l^3$. Navíc $1 = l^3 - k^3 = (l - k)(l^2 + lk + k^2)$, což nelze. Protože podmínka, že n se dá napsat jako součin dvou po sobě jdoucích čísel, vystupuje u dvou kombinací, vyloučíme i kombinaci znamének $\cdot \cdot$. Celkem tedy dostáváme, že $k \leq 6$, přičemž nyní hledáme n , pro které bude rovnic existovat právě šest.

Protože n je součin dvou po sobě jdoucích čísel a $3 \mid n$, tak právě jedno z těchto čísel bude dělitelné třemi. Můžeme uvažovat postupně $n = 2 \cdot 3$, $n = 3 \cdot 4$, $n = 5 \cdot 6$, ... Snadno ověříme, že pro $n = 6$ nám splynou rovnice pro $++$ a $++$, pro $n = 12$ nám splynou rovnice pro $++$ a $+$, $-$. Pro $n = 30$ však dostáváme všech šest rovnic

$$\begin{array}{ll} 10 + 10 + 10 = 30 & 29 + 29 : 29 = 30 \\ 30 + 30 - 30 = 30 & 31 - 31 : 31 = 30 \\ 5 + 5 \cdot 5 = 30 & 6 \cdot 6 - 6 = 30 \end{array}$$

Celkem tedy $k = 6$ a $n = 30$.

Pro úplnost poznamenejme, že tvar $a \cdot (a \pm 1) = n$ nám může dát nejvýše jedno přirozené řešení a . Jedná se vlastně o řešení kvadratické rovnice $a^2 \pm a - n = 0$ s neznámou a . Dostáváme tedy $a = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$, přičemž varianta $\frac{\pm 1 - \sqrt{1+4n}}{2}$ určitě přirozená nebude.